

Департамент образования Вологодской области
Вологодский институт развития образования

Серия «На пути к эффективной школе»

**РАБОТА НАД ЗАДАЧАМИ ПО ТЕМЕ
«ИНФОРМАЦИЯ, ИНФОРМАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ»
ПРИ ПОДГОТОВКЕ ОБУЧАЮЩИХСЯ К ГИА
ПО ИНФОРМАТИКЕ**

*Учебное пособие
для подготовки к итоговой государственной аттестации
выпускников основной и старшей школы*

Вологда
2021

УДК 372.8
ББК 74.262.21
Р47

Печатается по решению рабочей группы
по реализации проекта «Поддержка школ с низкими
результатами и школ, функционирующих
в неблагоприятных социальных условиях».
Протокол заседания № 4 от 27 августа 2021 года

*Издается в рамках реализации проекта «Поддержка школ
с низкими результатами и школ, функционирующих
в неблагоприятных социальных условиях»*

Составители:

Ганичева Е.М., к.п.н., доцент кафедры математики и информатики
Института математики, естественнонаучных и компьютерных наук
ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет»,

Голубев О.Б., к.п.н., доцент, директор Института математики, естественнонаучных
и компьютерных наук ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет»,

Рецензенты:

Горохова Ю.А., к.п.н., доцент кафедры математики и информатики
Института математики, естественнонаучных и компьютерных наук
ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет»;

Парусова О.А., учитель информатики МАОУ «СОШ № 4» г. Вологды

Р47 Работа над задачами по теме «Информация, информационные процессы» при подготовке обучающихся к ГИА по информатике : учебное пособие для подготовки к итоговой государственной аттестации / Департамент образования Вологодской области, Вологодский институт развития образования ; [составители Е.М. Ганичева, О.Б. Голубев]. – Вологда: ВИРО, 2021. – 68 с.: ил., табл. – (Серия «На пути к эффективной школе»).

ISBN 978-5-87590-531-5

Учебное пособие содержит материалы для подготовки к итоговой государственной аттестации по информатике за курс основной и старшей школы по теме «Информация, информационные процессы».

Учебное пособие предназначено для учителей информатики, обучающихся основной и старшей школы, студентов, обучающихся по направлению «Педагогическое образование», профиль «Математическое образование и информатика».

УДК 372.8
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-87590-531-5

© Департамент образования
Вологодской области, 2021
© Вологодский институт развития
образования, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
ТЕМА «ИНФОРМАЦИЯ И ЕЕ КОДИРОВАНИЕ»	5
ЗАДАНИЕ № 4. КОДИРОВАНИЕ И ДЕКОДИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ	5
ЗАДАНИЕ № 7. КОДИРОВАНИЕ РАСТРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ И ЗВУКА. СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ.	16
ЗАДАНИЕ № 8. КОДИРОВАНИЕ ДАННЫХ, КОМБИНАТОРИКА, СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ.	29
ЗАДАНИЕ № 11. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОГО ОБЪЕМА СООБЩЕНИЯ	43
ЗАДАНИЕ № 14. ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ	52
Литература	66

Введение

Информатика является предметом, по которому сдача единого государственного экзамена производится учащимися на добровольной основе. Стабильное увеличение в течение нескольких лет количества участников ЕГЭ по информатике и ИКТ можно объяснить растущим интересом выпускников к получению профессий в сфере информационных технологий, активной работой организаций дополнительного образования школьников по направлениям, связанным с программированием, робототехникой, ростом количества классов технологического профиля на уровне среднего общего образования, изучением информатики и ИКТ на углубленном уровне, ведением работы по профориентации и увеличением количества бюджетных мест в вузах по направлениям, связанным с информационными технологиями.

Анализ результатов ЕГЭ по информатике 2021 года свидетельствует о том, что задания на знание методов измерения количества информации, умение определить информационный объем сообщения, умение определить объем памяти, необходимый для хранения графической и звуковой информации вызывают затруднения у выпускников с разным уровнем подготовки. К дефицитам (проблемным зонам) относятся умение подсчитывать информационный объем сообщения, знание позиционных систем счисления.

В связи с этим учителю следует разрабатывать индивидуальные образовательные маршруты для обучающихся разных групп подготовки, ставить перед каждым учащимся ту цель, которую он может реализовать. При этом возможно опираться на самооценку и устремления каждого учащегося. Уровень сложности заданий в данном пособии позволяет освоить базовые умения обучающимся с недостаточной подготовкой по информатике.

Тренировочные материалы предназначены для подготовки к государственному выпускному экзамену (ЕГЭ) в компьютерной форме и включают задания из открытого банка заданий ФИПИ.

ТЕМА «ИНФОРМАЦИЯ И ЕЕ КОДИРОВАНИЕ»

ЗАДАНИЕ № 4. КОДИРОВАНИЕ И ДЕКОДИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИИ

Согласно спецификации контрольно-измерительных материалов для проведения в 2022 году единого государственного экзамена по информатике задание №4 проверяет умение кодировать и декодировать информацию.

Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору):

1.1.2. Процесс передачи информации, источник и приемник информации. Сигнал, кодирование и декодирование. Искажение информации.

Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору):

1.2.2. Интерпретировать результаты, получаемые в ходе выполнения реальных процессов.

Задание относится к базовому уровню сложности, не требует для решения специального программного обеспечения и рассчитано на 2 минуты.

В демонстрационном варианте 2022 года задание № 4 имеет следующий вид:

Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв Л, М, Н, П, Р, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию, что никакое кодовое слово не является началом другого кодового слова. Это условие обеспечивает возможность однозначной расшифровки закодированных сообщений. Для букв Л, М, Н использовали соответственно кодовые слова 00, 01, 11. Для двух оставшихся букв П и Р кодовые слова неизвестны.

Укажите кратчайшее возможное кодовое слово для буквы П, при котором код будет удовлетворять указанному условию. Если таких кодов несколько, укажите код с наименьшим числовым значением.

Для выполнения задания нужно знать:

- кодирование – это перевод информации с одного языка на другой (запись в другой системе символов, в другом алфавите);
- кодирование символов обычно предполагает, что каждому символу всегда сопоставляется одинаковое количество битов (например, в кодовой таблице ASCII каждому символу сопоставляется один байт, хранящий порядковый номер того или иного символа в этой таблице). Такой способ кодирования прост и удобен, однако он не является оптимальным;
- для значительной части символов используются не все биты отведенных под них байтов (часть старших битов – нулевые). Более компактным является неравномерный двоичный код. При этом количество битов, отводимых для кодирования символов, в целом зависит от количества используемых в конкретном случае различных символов (от мощности алфавита), а коды, соответствующие разным символам, могут иметь различную длину в битах;
- главное при таком кодировании – обеспечить возможность однозначного декодирования записанной с помощью этих кодов строки. Для этого коды символам необходимо назначать в соответствии с условиями Фано;
- прямое условие Фано. Неравномерный код может быть однозначно декодирован, если никакой из кодов не совпадает с началом (префиксом) какого-либо другого, более длинного кода.

A	B	C
10	11	001

D: 00

недопустимо:

C	001
D	00

Код D совпадает с началом кода C

A	B	C
10	11	00

D: 11

недопустимо:

B	11
D	11

Код D совпадает с кодом B

A	B	C
100	110	010

D: 00

допустимо:

Код D не совпадает ни с одним другим кодом и с началом никакого другого кода

- обратное условие Фано. Неравномерный код может быть однозначно декодирован, если никакой из кодов не совпадает с окончанием (постфиксом) какого-либо другого, более длинного кода.

A	B	C
10	11	001

D: 01

недопустимо:

C	001
D	01

Код D совпадает с концом кода C

A	B	C
10	11	00

D: 11

недопустимо:

B	11
D	11

Код D совпадает с кодом B

A	B	C
100	110	010

D: 01

допустимо:

Код D не совпадает ни с одним другим кодом и с концом никакого другого кода

- для однозначности декодирования последовательности кодов достаточно выполнения хотя бы одного из двух вышеуказанных условий Фано:
- при выполнении прямого условия Фано последовательность кодов декодируется с начала;
- при выполнении обратного условия Фано последовательность кодов однозначно декодируется с конца.

Базовые задачи

1. Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв А, Б, В, Г и Д, решили использовать неравномерный двоичный код, позволяющий однозначно декодировать двоичную последовательность, появляющуюся на приемной стороне канала связи. Использовали код: А-1, Б-000, В-001, Г-011. Укажите, каким кодовым словом должна быть закодирована буква Д. Длина этого кодового слова должна быть наименьшей из всех возможных. Код должен удовлетворять свойству однозначного декодирования.

Решение:

Проверяемый код буквы Д	Существующие коды букв А, Б, В и Г				Вывод
	А	Б	В	Г	
	1	000	001	011	
00	1 00 Совпадения нет	000 00 Совпадение есть	001 00 Совпадение есть	011 00 Совпадения нет	Код 00 для буквы Д непригоден
01	1 00 Совпадения нет	000 01 Совпадения нет	001 01 Совпадения нет	011 01 Совпадение есть	Код 01 для буквы Д непригоден
11	1 11 Совпадение есть	000 11 Совпадения нет	001 11 Совпадения нет	011 11 Совпадения нет	Код 11 для буквы Д непригоден

010	1 010 Совпадения нет	000 010 Совпадения нет	001 010 Совпадения нет	011 010 Совпадения нет	Код 010 для буквы Д подходит
-----	-------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	------------------------------------

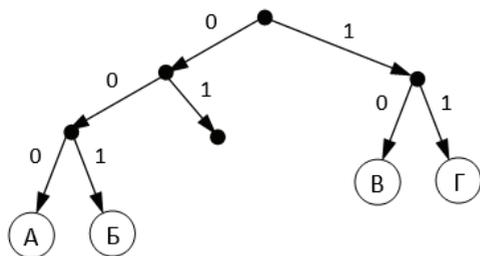
Таким образом, допустимым для буквы Д является код 010. Это единственный возможный вариант, поскольку условие о том, что кодовое слово должно иметь минимально возможную длину, в данном случае не требуется.

Ответ: код 010.

2. Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв А, Б, В, Г, Д, Е, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для букв А, Б, В, Г использовали соответственно кодовые слова 000, 001, 10, 11. Укажите кратчайшее возможное кодовое слово для буквы Д, при котором код будет допускать однозначное декодирование. Если таких кодов несколько, укажите код с наименьшим числовым значением.

Решение:

1) Построим дерево для заданного двоичного кода:



2) Согласно условию Фано, код декодируется однозначно, если все используемые кодовые слова соответствуют листьям такого дерева; видим, что для заданных кодовых слов это условие выполняется.

3) Может показаться, что ответ – 01, поскольку можно назначить этот код для буквы Д, однако это не так – тогда не будет возможности задать код для буквы Е.

4) Поэтому для того, чтобы добавить в это дерево две буквы (Д и Е) и сохранить выполнение условия Фано, нужно в узле 01 сделать развилку, тогда получается два свободных кода, 010 и 011, из них меньший – 010.

Ответ: 010.

3. Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв А, Б, В, Г, Д, Е, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для буквы А использовали кодовое слово 0; для буквы Б – кодовое слово 10. Какова наименьшая возможная сумма длин всех шести кодовых слов?

Примечание. Условие Фано означает, что никакое кодовое слово не является началом другого кодового слова. Это обеспечивает возможность однозначной расшифровки закодированных сообщений.

Решение:

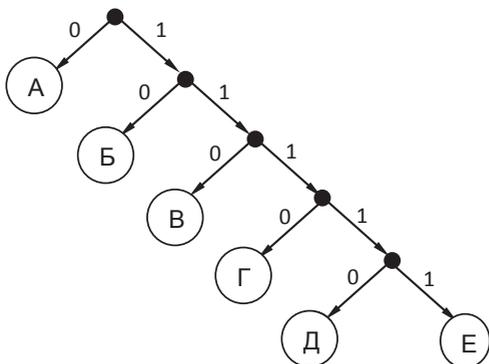
1) Это задание удобнее решать с помощью дерева. Условие Фано выполняется тогда, когда все выбранные кодовые слова заканчиваются в листьях дерева.

2) Построим дерево по известным кодовым словам: А – 0, Б – 10:



3) На оставшуюся свободную ветку нужно «повесить» 4 кодовых слова (для букв В, Г, Д, Е).

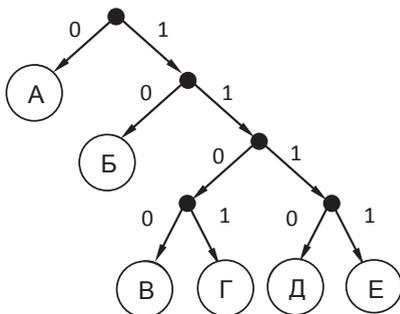
4) Если выбрать один код длиной 3 (В – 110), то оставшиеся 3 кода нужно «повесить» на одну ветку, так, что на ней нужно делать две развилки:



5) Суммарная длина кодовых слов будет в этом случае равна:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 2 \cdot 5 = 20.$$

6) Попробуем другой вариант: оставшиеся 4 кода разместить на 4 ветки одинаковой длины:



7) Суммарная длина кодовых слов будет в этом случае меньше, чем в предыдущем случае: $1 + 2 + 4 \cdot 4 = 19$.

Ответ: 19.

4. При передаче информации используется равномерный двоичный код. Передаче подлежат сообщения, которые могут состоять только из четырех букв: И, Н, Ф, О, при этом каждой букве соответствует отдельное кодовое слово.

Для используемого набора кодовых слов выполняется обязательное правило: любые два кодовых слова из этого набора должны различаться как

минимум в трех разрядах. Для кодирования букв И, Н, О используются следующие 5-битовые кодовые слова:

И: 11110, Н: 10000, О: 01001. Про 5-битовый код для буквы Ф известно, что он начинается и заканчивается единицей. Укажите кодовое слово для буквы Ф.

Решение:

В задачах этого типа речь идет об обычном двоичном коде, длина которого одинакова для всех кодируемых символов. Условия Фано в этом случае не используются, а для решения задачи достаточно обычных рассуждений.

1. По условию, любые два кодовых слова из используемого набора различаются как минимум в трех разрядах. Запишем предполагаемый код буквы Ф, заменяя неизвестные пока биты звездочками:

Ф: 0***1.

2. Сравним этот код с известными кодами других букв:

И: 11110

Н: 10000

О: 01001

Ф: 0***1

Видим, что начальный и конечный биты кода буквы Ф не совпадают с соответствующими битами кодов букв И и Н, но совпадают с начальным и конечным битами для буквы О.

3. По условию, нужно, чтобы коды О и Ф различались как минимум в трех позициях. А такое различие нам могут дать только три внутренних бита.

Тогда для Ф вместо звездочек надо выбрать биты, противоположные соответствующим битам для О:

О: 01001

Ф: 00111

4. Для кодов Ф и О требуемое условие соблюдено. Проверим его выполнение для кодов остальных букв:

И: 11110	Н: 10000
Ф: 00111	О: 00111
3 различия	4 различия

Таким образом, условие выполняется и для этих кодов.

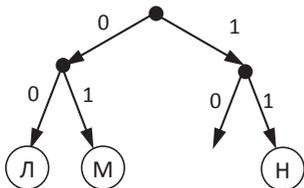
Ответ: 10110.

5 (демо 2022 г.). Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв Л, М, Н, П, Р, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию, что никакое кодовое слово не является началом другого кодового слова. Это условие обеспечивает возможность однозначной расшифровки закодированных сообщений.

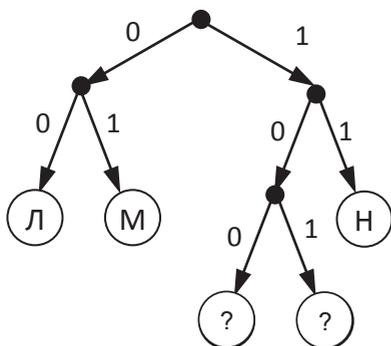
Для букв Л, М, Н использовали соответственно кодовые слова 00, 01, 11. Для двух оставшихся букв – П и Р – кодовые слова неизвестны. Укажите кратчайшее возможное кодовое слово для буквы П, при котором код будет удовлетворять указанному условию. Если таких кодов несколько, укажите код с наименьшим числовым значением.

Решение:

1) Построим дерево для заданного двоичного кода:



2) Для того чтобы выполнить условие Фано (ни одно кодовое слово не совпадает с началом другого кодового слова), необходимо, чтобы все буквы размещались в листьях дерева. Осталась единственная свободная ветка 10, на которую нужно разместить две буквы; это можно сделать так:



3) Таким образом, для кода буквы П есть два варианта одной длины: 100 и 101; по условию выбираем вариант с меньшим значением, то есть 100.

Ответ: 100.

Задачи для самостоятельного решения

1. Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв А, Б, В, Г, Д, Е, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для букв А, Б, В, Г использовали соответственно кодовые слова 000, 001, 10, 11. Укажите кратчайшее возможное кодовое слово для буквы Д, при котором код будет допускать однозначное декодирование. Если таких кодов несколько, укажите код с наименьшим числовым значением.

Ответ: 010.

2. По каналу связи с помощью равномерного двоичного кода передаются сообщения, содержащие только 4 буквы: X, Y, Z, W; для кодировки букв используются кодовые слова длины 5. При этом для набора кодовых слов выполнено такое свойство: *любые два слова из набора отличаются не менее чем в трех позициях*. Это свойство важно для расшифровки сообщений при наличии помех. Для кодирования букв X, Y, Z используются 5-битовые кодовые слова: X: 01111, Y: 00001, Z: 11000. Определите 5-битовое кодовое слово для буквы W, если известно, что оно начинается с 1 и заканчивается 0.

Ответ: 10110.

3. По каналу связи передаются сообщения, содержащие только семь букв: А, Б, В, Д, Е, И, Н. Для передачи используется двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Кодовые слова для некоторых букв известны: А – 110, Б – 01, И – 000. Какое наименьшее количество двоичных знаков потребуется для кодирования слова ВВЕДЕНИЕ?

Ответ: 23.

4. По каналу связи передаются сообщения, содержащие только семь букв: А, Б, З, К, Р, У, Ф. Для передачи используется двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Кодовые слова для некоторых букв известны: А – 00, Б – 01, Ф – 111. Какое наименьшее количество двоичных знаков потребуется для кодирования слова КУКУРУЗА?

Ответ: 25.

5. По каналу связи передаются сообщения, содержащие только четыре буквы: А, Б, В, Г; для передачи используется двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для буквы А используется кодовое слово: А – 101. Укажите сумму длин кратчайших кодовых слов для букв Б, В и Г, при котором код будет допускать однозначное декодирование.

Ответ: 6.

6. Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для букв А, Б, В, Г, Д, Е использовали соответственно кодовые слова 0101, 101, 011, 00, 0100, 11. Укажите кратчайшее возможное кодовое слово для буквы Ж, при котором код будет допускать однозначное декодирование. Если таких кодов несколько, укажите код с наименьшим числовым значением.

Ответ: 1000.

7. По каналу связи с помощью равномерного двоичного кода передаются сообщения, содержащие только 4 буквы А, Б, В, Г. Каждой букве соответствует свое кодовое слово, при этом для набора кодовых слов выполнено такое свойство: любые два слова из набора отличаются не менее чем в трех позициях.

Это свойство важно для расшифровки сообщений при наличии помех. Для кодирования букв Б, В, Г используются 5-битовые кодовые слова: Б: 00001, В: 01111, Г: 10110. 5-битовый код для буквы А начинается с 1 и заканчивается на 0. Определите кодовое слово для буквы А.

Ответ: 11000.

8. По каналу связи передаются сообщения, каждое из которых содержит 16 букв А, 8 букв Б, 4 буквы В и 4 буквы Г (других букв в сообщениях нет). Каждую букву кодируют двоичной последовательностью. При выборе кода учитывались два требования:

а) ни одно кодовое слово не является началом другого (это нужно, чтобы код допускал однозначное декодирование);

б) общая длина закодированного сообщения должна быть как можно меньше.

Какой код из приведенных ниже следует выбрать для кодирования букв А, Б, В и Г?

- 1) А:0, Б:10, В:110, Г:111
- 2) А:0, Б:10, В:01, Г:11
- 3) А:1, Б:01, В:011, Г:001
- 4) А:00, Б:01, В:10, Г:11

Ответ: 1.

9. Для кодирования некоторой последовательности, состоящей из букв А, Б, В, Г, решили использовать неравномерный двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для буквы А использовали кодовое слово 0, для буквы Б – кодовое слово 110. Какова наименьшая возможная суммарная длина всех четырех кодовых слов?

Ответ: 9.

10. По каналу связи передаются сообщения, содержащие только 5 букв А, И, К, О, Т. Для кодирования букв используется неравномерный двоичный код с такими кодовыми словами:

А – 0, И – 00, К – 10, О – 110, Т – 111.

Среди приведенных ниже слов укажите такое, код которого можно декодировать только одним способом. Если таких слов несколько, укажите первое по алфавиту.

1) КАА 2) ИКОТ 3) КОТ 4) ни одно из сообщений не подходит

Ответ: 3) КОТ.

ЗАДАНИЕ № 7. КОДИРОВАНИЕ РАСТРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ И ЗВУКА. СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Согласно спецификации контрольно-измерительных материалов для проведения в 2022 году единого государственного экзамена по информатике задание №7 проверяет умение определять объем памяти, необходимый для хранения графической и звуковой информации.

Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору):

3.3.1. Форматы представления графических и звуковых объектов.

Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору):

1.3.2. Умение оценивать скорость передачи и обработки информации.

Задание относится к базовому уровню сложности, не требует для решения специального программного обеспечения и рассчитано на 5 минут.

В демонстрационном варианте 2022 года задание № 7 имеет следующий вид:

Для хранения произвольного растрового изображения размером 128 x 320 пикселей отведено 20 Кбайт памяти без учета размера заголовка файла. Для кодирования цвета каждого пикселя используется одинаковое количество бит, коды пикселей записываются в файл один за другим без промежутков. Какое максимальное количество цветов можно использовать в изображении?

Что нужно знать для выполнения задания:

- для хранения растрового изображения нужно выделить в памяти $I = N \cdot i$ бит, где N – количество пикселей и i – глубина цвета (разрядность кодирования);

- количество пикселей изображения N вычисляется как произведение ширины рисунка на высоту (в пикселях) (рис.1);

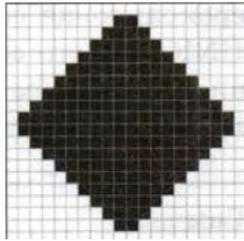


Рисунок 1. Растровое изображение

- глубина цвета – это количество бит, которые выделяются на хранение цвета одного пикселя;
- при глубине кодирования i битов на пиксель код каждого пикселя выбирается из 2^i возможных вариантов, поэтому можно использовать не более 2^i различных цветов, $N = 2^i$;
- разрешение – это количество пикселей, приходящихся на единицу линейного размера изображения;
- разрешение обычно измеряется в пикселях на дюйм, используется английское обозначение ppi – pixels per inch. Например, разрешение 254 ppi означает, что на дюйм (25,4 мм) приходится 254 пикселя, так что каждый пиксель «содержит» квадрат исходного изображения размером 0,1 x 0,1 мм. Если провести дискретизацию рисунка размером 10 x 15 см с разрешением 254 ppi, то высота закодированного изображения будет $100/0,1=1000$ пикселей, а ширина – 1500 пикселей. Чем больше разрешение, тем точнее кодируется рисунок, однако одновременно растет и объем файла.
- нужно помнить, что:
 - 1 Мбайт = 2^{20} байт = 2^{23} бит,
 - 1 Кбайт = 2^{10} байт = 2^{13} бит;
- при оцифровке звука в памяти запоминаются только отдельные значения сигнала, который нужно выдать на динамик или наушники;

- **частота дискретизации** определяет количество отсчетов, запоминаемых за 1 секунду; 1 Гц (один герц) – это один отсчет в секунду, а 8 кГц – это 8000 отсчетов в секунду;
- **глубина кодирования** – это количество бит, которые выделяются на один отсчет;
- для хранения информации о звуке длительностью t секунд, закодированном с частотой дискретизации f Гц, глубиной кодирования i бит и количестве каналов k требуется $I=f \cdot k \cdot t \cdot i$ бит памяти;
- количество каналов: $k=1$ – моно, $k=2$ – стерео, $k=4$ – квадро;
- уровни дискретизации – это количество разных возможных значений одного отсчета. Количество уровней дискретизации вычисляется по формуле: $N=2^i$, где i – глубина кодирования;
- для упрощения ручных расчетов можно использовать приближенные равенства: 1 мин = 60 сек \approx 64 сек = 2^6 сек; 1000 \approx 1024 = 2^{10} .

Базовые задачи

1. Для хранения произвольного растрового изображения размером 128×320 пикселей отведено 20 Кбайт памяти без учета размера заголовка файла. Для кодирования цвета каждого пикселя используется одинаковое количество бит, коды пикселей записываются в файл один за другим без промежутков. Какое максимальное количество цветов можно использовать в изображении?

Решение:

Дано:	Решение:	
N=128 x 320 I=20 Кбайт	I=N·i N = 2 ⁱ	$i = \frac{20 \text{ Кбайт}}{128 \cdot 320} = \frac{20 \cdot 2^{13} \text{ бит}}{2^7 \cdot 2^6 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 2^{13}}{2^{13} \cdot 5} = 4 \text{ бита}$ N _{цв} =2 ⁴ =16
N _{цв} - ?		Ответ: 16 цветов

Ответ: 16.

2. После преобразования растрового 256-цветного графического файла в черно-белый формат (2 цвета) его размер уменьшился на 7 Кбайт. Каков был размер исходного файла в Кбайтах?

Решение:

Анализируя условие этой задачи, заметим, что речь идет о двух способах сохранения одного и того же графического изображения (рисунка), но с разными условиями. Первый раз рисунок был сохранен цветным, с использованием палитры из 256 цветов, второй раз его сохранили после преобразования в черно-белый формат. Отметим это при записи условия задачи, обозначив параметры первой записи с нижним индексом «1», а второй – с нижним индексом «2». По условию задачи количество пикселей не менялось.

Дано:	Решение:	
$N_{\text{цв1}} = 256$	$I = N \cdot i$	По условию задачи,
$N_{\text{цв2}} = 2$	$N = 2^i$	$i_1 = 8, i_2 = 1$
$N_1 = N_2$		$I_1 = 8N \quad I_2 = N$
$I_1 - I_2 = 7 \text{ Кбайт}$		$\begin{cases} I_1 = 8 \cdot I_2 \\ I_1 - I_2 = 7 \end{cases}$
		$I_2 = 1 \text{ Кбайт}, I_1 = 8 \text{ Кбайт}$
$I_1 - ?$		Ответ: 8 Кбайт

Ответ: 8.

3. Цветное изображение было оцифровано и сохранено в виде файла без использования сжатия данных. Размер полученного файла – 54 Мбайт. Затем то же изображение было оцифровано повторно с разрешением в 2 раза больше и глубиной кодирования цвета в 3 раза меньше по сравнению с первоначальными параметрами. Сжатие данных не производилось. Укажите размер файла в Мбайт, полученного при повторной оцифровке.

Решение:

Анализируя условие этой задачи, заметим, что речь идет о двух способах сохранения одного и того же графического изображения (рисунка), но с разными условиями. Первый раз рисунок был сохранен с количеством пикселей N_1 , глубиной цвета i_1 , второй раз его сохранили после преобразования, увеличив разрешение в 2 раза, а глубину кодирования цвета уменьшили в 3 раза. Отметим, что условие «с разрешением в 2 раза» означает, что количество пикселей

увеличилось в 2 раза по каждому измерению, т.е. количество пикселей стало в 4 раза больше.

Дано:	Решение:	
$I_1 = 54 \text{ МКбайт}$	$I = N \cdot i$ $N = 2^i$	По условию задачи, $i_2 = \frac{i_1}{3}$ $N_2 = 4 \cdot N_1$ $I_2 = N_2 \cdot i_2 = 4 \cdot N_1 \cdot \frac{i_1}{3} = \frac{4}{3} I_1 = \frac{4}{3} \cdot 54 \text{ Мбайт} = 72 \text{ Мбайт}$
$I_2 = ?$		Ответ: 72 Мбайт

Ответ: 72.

4. Изображение было оцифровано и сохранено в виде растрового файла. Получившийся файл был передан в город А по каналу связи за 72 секунды. Затем то же изображение было оцифровано повторно с разрешением в 2 раза больше и глубиной кодирования цвета в 3 раза меньше, чем в первый раз. Сжатие данных не производилось. Полученный файл был передан в город Б, пропускная способность канала связи с городом Б в 3 раза выше, чем канала связи с городом А. Сколько секунд длилась передача файла в город Б?

Решение:

Анализируя условие этой задачи, заметим, что здесь появляется еще один процесс – процесс передачи файла, а значит, потребуется формула, связывающая объем передаваемого файла, пропускную способность канала связи (v , единица измерения пропускной способности канала связи измеряется в битах в секунду), $I = v \cdot t$, и время передачи файла (t , единица измерения этой величины – секунда).

Полезно сделать графическую иллюстрацию условия задачи (рис. 2):

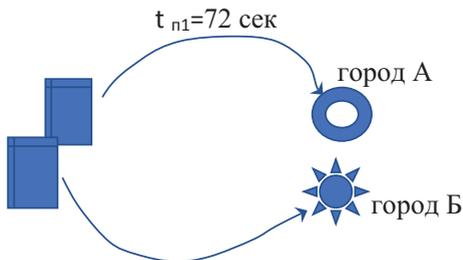


Рисунок 2. Иллюстрация к задаче 4

Введем обозначение t_{n1} – время передачи файла в город А, t_{n2} – время передачи файла в город Б.

Дано:	Решение:	
$t_{n1}=72$ сек	$I = N \cdot i$ $I = v \cdot t$ $N = 2^i$	По условию задачи, $i_2 = \frac{i_1}{3}$ $N_2 = 4 \cdot N_1$ $v_2 = 3 \cdot v_1$ $I_2 = N_2 \cdot i_2 = 4 \cdot N_1 \cdot \frac{i_1}{3} = \frac{4}{3} I_1$ $I_2 = v_2 \cdot t_{n2}$ $t_{n2} = \frac{I_2}{v_2} = \frac{\frac{4}{3} I_1}{3 \cdot v_1} = \frac{4}{9} \cdot \frac{v_1 \cdot t_{n1}}{v_1} = \frac{4}{9} \cdot 72 = 32$ сек
$t_{n2} = ?$		Ответ: 32 сек

Ответ: 32.

5. Камера делает фотоснимки размером 1024 x 768 пикселей. На хранение одного кадра отводится 900 Кбайт. Найдите максимально возможное количество цветов в палитре изображения.

Решение:

Дано:	Решение:	
$N = 1024 \times 768$ $I = 900$ Кбайт	$I = N \cdot i$ $N = 2^i$	$i = \frac{900 \text{ Кбайт}}{1024 \cdot 768} = \frac{900 \cdot 2^{13} \text{ бит}}{2^{10} \cdot 2^3 \cdot 96} = \frac{900}{96} \approx 9,4$ $N_{\text{цв}} = 2^9 = 512$
$N_{\text{цв}} = ?$		Ответ: 512 цветов

Решая эту задачу, получаем приближенное значение глубины цвета, но глубина цвета не может быть выражена нецелым числом, поскольку бит – это минимальная единица. Поэтому округляем в сторону уменьшения и получаем 9 бит.

Ответ: 9.

6. Для хранения в информационной системе документы сканируются с разрешением 200 dpi и цветовой системой, содержащей 130 цветов. Методы сжатия изображений не используются. Средний размер отсканированного

документа составляет 10 Мбайт. Для повышения качества представления информации было решено перейти на разрешение 300 dpi и цветовую систему, содержащую $2^{16} = 65\,536$ цветов. Сколько Мбайт будет составлять средний размер документа, отсканированного с измененными параметрами?

Решение:

Дано:	Решение:	
$N_{цв1} = 130$ $N_{цв2} = 65536$ $N_1 = 200 \times 200$ $N_2 = 300 \times 300$ $I_1 = 10$ Мбайт	$I = N \cdot i$ $N = 2^i$	Разрешение изображения изменилось с 200 dpi на 300 dpi. Это означает, что размер изображения изменился в $(300 \cdot 300) / (200 \cdot 200) = 9/4$ раз. $\frac{N_2}{N_1} = \frac{9}{4}$ Для хранения цветовой системы, состоящей из 130 цветов, необходимо 8 бит (необходимо подобрать минимально возможный i , так, чтобы $N \leq 2^i$; $130 \leq 2^8$). $i_1 = 8$ По условию $i_2 = 16$ Средний размер документа, отсканированного с измененными параметрами $I_2 = N_2 \cdot i_2 = 9/4 \cdot N_1 \cdot 2 \cdot i_1 = 9/4 \cdot 2 \cdot 10$ Мбайт = 45 Мбайт
$I_2 = ?$		Ответ: 45 Мбайт

Ответ: 45.

7. Производилась двухканальная (стерео) звукозапись с частотой дискретизации 64 кГц и 24-битным разрешением. В результате был получен файл размером 120 Мбайт, сжатие данных не производилось. Определите приблизительно, сколько времени (в минутах) производилась запись. В качестве ответа укажите ближайшее к времени записи целое число, кратное 5.

Решение:

Дано:	Решение:	
$f = 64$ кГц $i = 24$ бита $I = 120$ Мбайт $K=2$	$I = f \cdot k \cdot t \cdot i$	$t = \frac{I}{f \cdot k \cdot i}$ $t = \frac{120 \text{ Мбайт}}{64 \text{ кГц} \cdot 2 \cdot 24 \text{ бита}} = \frac{120 \cdot 2^{23} \text{ бит}}{64 \cdot 1000 \text{ Гц} \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot 3}$ $\approx \frac{120 \cdot 2^{23}}{2^6 \cdot 2^{10} \cdot 2 \cdot 2^3 \cdot 3} = 40 \cdot 8 = 320 \text{ сек}$ $\approx 5 \text{ мин}$
$t = ?$		Ответ: 5 мин

Ответ: 5.

8. Музыкальный фрагмент был оцифрован и записан в виде файла без использования сжатия данных. Получившийся файл был передан в город А по каналу связи за 30 секунд. Затем тот же музыкальный фрагмент был оцифрован повторно с разрешением в 2 раза выше и частотой дискретизации в 1,5 раза меньше, чем в первый раз. Сжатие данных не производилось. Полученный файл был передан в город Б; пропускная способность канала связи с городом Б в 4 раза выше, чем канала связи с городом А. Сколько секунд длилась передача файла в город Б? В ответе запишите только целое число, единицу измерения писать не нужно.

Решение:

Анализируя условие этой задачи, заметим, что здесь появляется еще один процесс – процесс передачи файла, а значит, потребуются формула, связывающая объем передаваемого файла, пропускную способность канала связи (v , единица измерения пропускной способности канала связи измеряется в битах в секунду), $I=v \cdot t$, и время передачи файла (t , единица измерения этой величины – секунда).

Полезно сделать графическую иллюстрацию условия задачи (рис. 3):

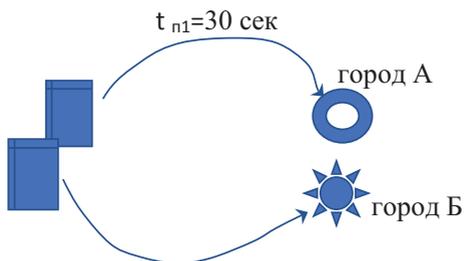


Рисунок 3. Иллюстрация к задаче 8

Следует обратить внимание на то, что в условиях этой задачи есть две переменные с названием «время»: это время записи звукового файла и время передачи файла. Поэтому введем обозначение t_{n1} – время передачи файла в город А, t_{n2} – время передачи файла в город Б. Время записи файла, судя по условию задачи, было одинаковым и в первом, и во втором случае.

Дано:	Решение:	
$t_{n1}=30$ сек	$I=f \cdot k \cdot t \cdot i$ $N = 2^i$	По условию задачи, $i_2 = 2 \cdot i_1$ $f_2 = \frac{f_1}{1,5} = \frac{2}{3} f_1$ $I_2 = f_2 \cdot k_2 \cdot t_2 \cdot i_2$ $I_2 = \frac{2}{3} f_1 \cdot k_1 \cdot t_1 \cdot 2 \cdot i_1 = \frac{4}{3} I_1$ $I_2 = v_2 \cdot t_{n2}$ $v_2 = 4 \cdot v_1$ $t_{n2} = \frac{I_2}{v_2} = \frac{\frac{4}{3} I_1}{4 \cdot v_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{v_1 \cdot t_{n1}}{v_1} = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10$ сек
$t_{n2} = ?$		Ответ: 32 сек

Ответ: 32.

9. Музыкальный фрагмент был записан в формате квадро (четырёхканальная запись), оцифрован и сохранен в виде файла без использования сжатия данных. Затем тот же музыкальный фрагмент был записан повторно в формате моно и оцифрован с разрешением в 3 раза меньше и частотой дискретизации в 2,5 раза больше, чем в первый раз. При этом производилось сжатие данных, объем сжатого фрагмента стал равен 40% от исходного. Размер полученного файла – 6 Мбайт. Укажите размер файла в Мбайт, полученного при начальной записи. В ответе запишите только целое число, единицу измерения писать не нужно.

Решение:

В этой задаче необходимо рассмотреть три процесса: начальная запись музыкального фрагмента, повторная запись музыкального фрагмента и сжатие данных. Представим запись решения в таблице:

Начальная запись	Повторная запись	Сжатие
$k_1 = 4$	$k_2 = k_1/4$	$I_3 = 6$ Мбайт
f_1	$f_2 = 2,5 \cdot f_1$	По условию, $I_3 = 0,4 \cdot I_2$
i_1	$i_2 = i_1/3$	$I_2 = 6/0,4 = 15$ Мбайт
I_1	$I_2 = 5/24 \cdot I_1$	$I_1 = 24/5 \cdot 15 = 72$ Мбайта

Ответ: 72.

Задачи для самостоятельного решения

1. Рисунок размером 512 на 256 пикселей занимает в памяти 64 Кбайт (без учета сжатия). Найдите максимально возможное количество цветов в палитре изображения.

Ответ: 16.

2. Какой минимальный объем памяти (в Кбайт) нужно зарезервировать, чтобы можно было сохранить любое растровое изображение размером 64 на 64 пикселей при условии, что в изображении могут использоваться 256 различных цветов? В ответе запишите только целое число, единицу измерения писать не нужно.

Ответ: 4.

3. Для хранения в информационной системе документы сканируются с разрешением 600 ppi и цветовой системой, содержащей $2^{24} = 16\,777\,216$ цветов. Методы сжатия изображений не используются. В целях экономии было решено перейти на разрешение 150 ppi и цветовую систему, содержащую $2^{16} = 65\,536$ цветов. Средний размер документа, отсканированного с измененными параметрами, составляет 256 Кбайт. Сколько Мбайт составлял средний размер документа до оптимизации?

Ответ: 6.

4. Автоматическая фотокамера каждые 15 секунд создает растровое изображение, содержащее 256 цветов. Размер изображения – 240 x 320 пикселей. Все полученные изображения и коды пикселей внутри одного изображения записываются подряд, никакая дополнительная информация не сохраняется, данные не сжимаются. Сколько Кбайт нужно выделить для хранения всех изображений, полученных за 1 минуту? В ответе укажите только целое число – количество Кбайт, единицу измерения указывать не надо.

Ответ: 300.

5. Камера снимает видео без звука с частотой 48 кадров в секунду, при этом изображения используют палитру, содержащую 4096 цвета. 1 минута видео в среднем занимает 18 Мегабайт. При записи файла на сервер полученное видео преобразуют так, что его частота кадров уменьшается до 24 кадров в секунду, а

изображения преобразуют в формат, содержащий палитру из 16 цветов. Другие преобразования и иные методы сжатия не используются. Сколько минут преобразованного видео в среднем можно записать при ограничении размера видеозаписи в 48 Мегабайт?

Ответ: 16.

6. Какой минимальный объем памяти (в Кбайт) нужно зарезервировать, чтобы можно было сохранить любое растровое изображение размером 128 на 128 пикселей при условии, что в изображении могут использоваться 256 различных цветов? В ответе запишите только целое число, единицу измерения писать не нужно.

Ответ: 16.

7. Рисунок размером 128 на 256 пикселей занимает в памяти 24 Кбайт (без учета сжатия). Найдите максимально возможное количество цветов в палитре изображения.

Ответ: 64.

8. После преобразования растрового графического файла его объем уменьшился в 2 раза. Сколько цветов было в палитре первоначально, если после преобразования было получено растровое изображение того же разрешения в 16-цветной палитре?

Ответ: 256.

9. Цветное изображение было оцифровано и сохранено в виде файла без использования сжатия данных. Размер полученного файла – 54 Мбайт. Затем то же изображение было оцифровано повторно с разрешением в 2 раза больше и глубиной кодирования цвета в 3 раза меньше по сравнению с первоначальными параметрами. Сжатие данных не производилось. Укажите размер файла в Мбайт, полученного при повторной оцифровке.

Ответ: 72.

10. Автоматическая фотокамера делает фотографии высокого разрешения с палитрой, содержащей $2^{24} = 16\,777\,216$ цветов. Средний размер фотографии составляет 12 Мбайт. Для хранения в базе данных фотографии преобразуют в формат с палитрой, содержащей $2^{16} = 65\,536$ цветов. Другие преобразования и

дополнительные методы сжатия не используются. Сколько Мбайт составляет средний размер преобразованной фотографии?

Ответ: 8.

11. Производится одноканальная (моно) звукозапись с частотой дискретизации 16 кГц и глубиной кодирования 24 бита. Запись длится 1 минуту, ее результаты записываются в файл, сжатие данных не производится. Какое из приведенных ниже чисел наиболее близко к размеру полученного файла, выраженному в мегабайтах? 1) 0,2 2) 2 3) 3 4) 4

Ответ: 3.

12. Производится одноканальная (моно) звукозапись с частотой дискретизации 64 кГц. При записи использовались 32 уровня дискретизации. Запись длится 4 минуты 16 секунд, ее результаты записываются в файл, причем каждый сигнал кодируется минимально возможным и одинаковым количеством битов. Какое из приведенных ниже чисел наиболее близко к размеру полученного файла, выраженному в килобайтах?

1) 10 2) 64 3) 80 4) 512

Ответ: 10.

13. В течение 4 минут производится двухканальная (стерео) звукозапись. Результаты записи записываются в файл, размер полученного файла – 40 Мбайт (с точностью до 10 Мбайт); сжатие данных не производилось. Среди перечисленных ниже режимов укажите тот, в котором проводилась звукозапись.

- 1) Частота дискретизации 16 кГц и 24-битное разрешение
- 2) Частота дискретизации 16 кГц и 16-битное разрешение
- 3) Частота дискретизации 32 кГц и 24-битное разрешение
- 4) Частота дискретизации 32 кГц и 16-битное разрешение

Ответ: 3)

14. Музыкальный фрагмент был оцифрован и записан в виде файла без использования сжатия данных. Получившийся файл был передан в город А по каналу связи за 96 секунд. Затем тот же музыкальный фрагмент был оцифрован повторно с разрешением в 4 раза выше и частотой дискретизации в 3 раза ниже, чем в первый раз. Сжатие данных не производилось. Полученный файл был

передан в город Б за 16 секунд. Во сколько раз пропускная способность канала в город Б больше пропускной способности канала в город А?

Ответ: 8.

15. Для мультипликационного фильма видеоряд с частотой 60 кадров в секунду и звуковая восьмиканальная дорожка записываются отдельно. Для хранения на сервере видео преобразуют так, что частота уменьшается до 30 кадров в секунду, а количество пикселей уменьшается в 4 раза. Звук перезаписывается в формате стерео с уменьшением частоты дискретизации и глубины кодирования в 2 раза. Другие преобразования и иные методы сжатия не используются. После преобразования 1 минута видеоряда в среднем занимает 1,5 Мегабайта, а 1 минута звуковой дорожки – 512 Килобайт. Сколько Мбайт в среднем занимают 10 минут исходного видеоряда и звуковой дорожки вместе?

Ответ: 200.

16. Производится одноканальная (моно) звукозапись с частотой дискретизации 22 кГц и глубиной кодирования 16 бит. Запись длится 2 минуты, ее результаты записываются в файл, сжатие данных не производится. Какое из приведенных ниже чисел наиболее близко к размеру полученного файла, выраженному в мегабайтах?

1) 1 2) 2 3) 5 4) 10

Ответ: 3) 5.

17. Проводилась одноканальная (моно) звукозапись с частотой дискретизации 16 кГц и 24-битным разрешением. В результате был получен файл размером 3 Мбайт, сжатие данных не производилось. Какая из приведенных ниже величин наиболее близка к времени, в течение которого проводилась запись?

1) 30 сек 2) 60 сек 3) 90 сек 4) 120 сек

Ответ: 60.

18. Производится одноканальная (моно) звукозапись с частотой дискретизации 128 Гц. При записи использовались 64 уровня дискретизации. Запись длится 6 минут 24 секунды, ее результаты записываются в файл, причем каждый сигнал кодируется минимально возможным и одинаковым количеством

битов. Какое из приведенных ниже чисел наиболее близко к размеру полученного файла, выраженному в килобайтах?

- 1) 24 2) 36 3) 128 4) 384

Ответ: 36.

19. Производилась двухканальная (стерео) звукозапись с частотой дискретизации 64 кГц и 24-битным разрешением. В результате был получен файл размером 48 Мбайт, сжатие данных не производилось. Определите приблизительно, сколько времени (в минутах) проводилась запись. В качестве ответа укажите ближайшее к времени записи целое число.

Ответ: 2.

20. Музыкальный фрагмент был записан в формате моно, оцифрован и сохранен в виде файла с использованием сжатия данных. При этом производилось сжатие данных, объем сжатого фрагмента стал равен 40% от первоначальной записи. Затем тот же музыкальный фрагмент был записан повторно в формате стерео (двухканальная запись) и оцифрован с разрешением в 8 раз выше и частотой дискретизации в 2 раз выше, чем в первый раз. При этом производилось сжатие данных, объем сжатого фрагмента стал равен 60% от повторной записи. Во сколько раз размер повторной записи будет больше изначальной?

Ответ: 48.

ЗАДАНИЕ № 8. КОДИРОВАНИЕ ДАННЫХ, КОМБИНАТОРИКА, СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Согласно спецификации контрольно-измерительных материалов для проведения в 2022 году единого государственного экзамена по информатике задание №8 проверяет знание основных понятий и методов, используемых при измерении количества информации.

Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору):

1.1.3. Дискретное (цифровое) представление текстовой, графической, звуковой информации и видеоинформации.

Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору):

1.3.1. Умение оценивать объем памяти, необходимый для хранения информации.

Задание относится к базовому уровню сложности, не требует для решения специального программного обеспечения и рассчитано на 4 минуты.

В демонстрационном варианте 2022 года задание № 8 имеет следующий вид:

Все четырехбуквенные слова, в составе которых могут быть только буквы Л, Е, М, У, Р, записаны в алфавитном порядке и пронумерованы начиная с 1.

Ниже приведено начало списка.

1. ЕЕЕЕ
2. ЕЕЕЛ
3. ЕЕЕМ
4. ЕЕЕР
5. ЕЕЕУ
6. ЕЕЛЕ

....

Под каким номером в списке идет первое слово, которое начинается с буквы Л?

Что нужно знать для выполнения задания:

- в русском языке 33 буквы: 10 гласных букв (а, у, о, ы, и, э, я, ю, е, е), 21 согласная буква (б, в, г, д, ж, з, й, к, л, м, н, п, р, с, т, ф, х, ц, ч, ш, щ) и два знака (ь, ъ). Алфавит английского языка по написанию совпадает с латинским алфавитом и состоит из 26 букв;
- принципы работы с числами, записанными в позиционных системах счисления;
- если слово состоит из L букв, причем есть n_1 вариантов выбора первой буквы, n_2 вариантов выбора второй буквы и т.д., то число возможных слов вычисляется как произведение: $N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_L$;
- если слово состоит из L букв, причем каждая буква может быть выбрана n способами, то число возможных слов вычисляется как $N = n^L$.

Базовые задачи

1. Маша составляет 5-буквенные коды из букв В, У, А, Л, Б. Каждую букву нужно использовать ровно 1 раз, при этом код буква Б не может стоять на первом месте и перед гласной. Сколько различных кодов может составить Маша?

Решение:

- 1) Проще всего сначала найти общее количество возможных слов, а затем вычесть из него количество «запрещенных» слов – тех, которые начинаются на букву Б или содержат комбинации БУ и БА.
- 2) Сначала найдем общее количество слов, не накладывая никаких ограничений; при этом есть 5 способов выбрать первую букву, 4 способа выбрать вторую и т.д., так что общее число вариантов равно $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.
- 3) Первой буквой не может быть Б, это исключает $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ варианта.
- 4) Теперь определим, сколько слов содержит запрещенную комбинацию символов БУ; эта комбинация может располагаться на одной из 4-х позиций: БУ***, *БУ**, **БУ*, ***БУ. Первый случай уже исключен (слово не может начинаться с буквы Б), для каждого из остальных случаев количество вариантов распределения остальных букв равно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ варианта, то есть запрет сочетания БУ исключает $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ кодов.
- 5) Аналогично запрет сочетания БА исключает еще 18 кодов.
- 6) Таким образом, из 120 слов запрещенными являются 24 варианта с первой буквой Б, 18 вариантов, содержащих БУ в середине слова, и 18 вариантов, содержащих БА в середине слова.
- 7) Остается $120 - 24 - 18 - 18 = 60$ кодов.

Ответ: 60.

2. Вася составляет 4-буквенные коды из букв У, Л, Е, Й. Каждую букву нужно использовать ровно 1 раз, при этом код не может начинаться с буквы Й и не может содержать сочетания ЕУ. Сколько различных кодов может составить Вася?

Решение:

- 1) Сначала найдем общее количество возможных слов, а затем вычтем из него количество слов, в которых есть сочетание ЕУ.

- 2) Первой буквой не может быть Й, поэтому осталось только 3 возможных первых буквы.
- 3) Предположим, что первую букву выбрали, тогда вторую выбираем из оставшихся трех.
- 4) При выборе третьей буквы у нас только 2 варианта, а последняя буква – та, которая осталась последней невыбранной:

3	3	2	1
---	---	---	---

- 5) В итоге общее количество возможных слов равно $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$.
- 6) Определим, сколько слов содержат сочетание ЕУ; нужно рассмотреть все возможные позиции, где может стоять пара ЕУ.
- 7) Пусть слово начинается с ЕУ, тогда следующую букву можно выбрать двумя способами, а последнюю – только одним, так что количество вариантов равно 2:

1(Е)	1(У)	2	1
------	------	---	---

- 8) Пусть пара ЕУ – это вторая и третья буквы; тогда на первом месте может стоять только буква Л (но не Й), а на последнем – Й, получаем еще один вариант:

1(Л)	1(Е)	1(У)	1(Й)
------	------	------	------

- 9) Сдвиг пары ЕУ в конец слова дает еще одну комбинацию:

1(Л)	1(Й)	1(Е)	1(У)
------	------	------	------

- 10) Таким образом, из 18 слов четыре $(2 + 1 + 1)$ содержат ЕУ.

Ответ: 14.

3. Вася составляет 3-буквенные слова, в которых есть только буквы В, Е, С, Н, А, причем буква А используется в каждом слове хотя бы 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

Решение (способ 1):

Буква А может стоять на одном из трех мест: А**, *А*, **А, где * обозначает любой из пяти символов. В каждом случае в остальных двух позициях может быть любая из пяти букв.

Для шаблона A^{**} получаем (перемножая количество вариантов для каждой позиции): $1 \cdot 5 \cdot 5 = 25$ слов.

Для шаблона $*A^*$ тоже получим 25 слов, но нужно учесть, что все слова, в которых первая буква A , мы уже подсчитали, поэтому считаем только слова, где на первом месте стоит какая-то другая буква (B, E, C или H).

Отсюда находим, что шаблон $*A^*$ добавляет $4 \cdot 1 \cdot 5 = 20$ новых слов.

Рассматривая шаблон $**A$, не учитываем уже подсчитанные слова, в которых буква A есть на первом или втором месте, количество новых слов: $4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$.

Всего получается $25 + 20 + 16 = 61$ слово.

Ответ: 61.

Решение (способ 2):

Количество слов с буквой A можно вычислить как разность между количеством всех возможных слов и количеством слов, в которых нет буквы A . Количество всех слов $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ (на любой из 3-х позиций может стоять любая из 5 букв).

Количество слов, в которых нет буквы A равно $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$ (на любой из 3-х позиций может стоять любая из 4 букв, кроме A).

Получается $125 - 64 = 61$ слово, в котором есть буква A (она или несколько).

Ответ: 61.

4. Все 5-буквенные слова, составленные из букв A, O, Y , записаны в алфавитном порядке и пронумерованы. Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААО
3. ААААУ
4. АААОА
-

Запишите слово, которое стоит на 240-м месте от начала списка.

Решение:

Поскольку слова начинаются на букву A и их список начинается с ААААА, а далее идут слова ААААО, ААААУ, АААОА и т.д., буквы A, O, Y

сопоставляются цифрам: А – 0, О – 1, У – 2. В результате исходная задача сводится к следующей:

Все 5-значные числа, составленные из цифр 0, 1, 2, записаны в порядке возрастания. Вот начало списка:

1. 00000
2. 00001
3. 00002
4. 00010

.....

Какое число стоит на 240-м месте в списке?

Чтобы определить число, стоящее в списке на 240-й позиции, нужно учесть «рассогласование» между значениями чисел и их порядковыми номерами в списке:

Последовательность чисел начинается со значения $00000_3 = 0_{10}$

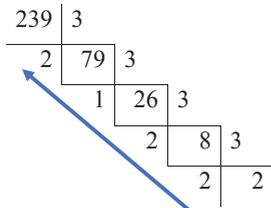
Нумерация чисел в списке начинается с 1.

Тогда для определения числа, стоящего в 240-й позиции, составляется следующее соответствие:

Порядковый номер	Значение числа
1	0
240	(240-1)

Очевидно, что на 240-м месте в списке стоит десятичное число 239 (так как значение числа на 1 меньше, чем порядковый номер).

Пятиразрядная запись этого числа в троичной системе счисления определяется с помощью перевода этого числа в троичную систему счисления:



В результате на 240-м месте в списке находится пятиразрядное число 22212.

Преобразуя это число к записи слова, кодируемого буквами А, О, У по правилу соответствия: А – 0, О – 1, У – 2, получается слово: УУУОУ.

Ответ: УУУОУ.

5. Все 5-буквенные слова, составленные из букв К, О, Т, записаны в алфавитном порядке и пронумерованы. Вот начало списка:

1. ТТТОК
2. ТТТКТ
3. ТТТКО
4. ТТТКК
5. ТТОТТ

.....

На каком месте списка находится слово КОТОК?

Решение:

В приведенном списке после слова ТТТОК идет слово ТТТКТ, потом ТТТКО, затем ТТТКК и ТТОТТ. Тогда, сопоставив буквы К, О, Т цифрам: Т – 0, О – 1, К – 2, условие задачи переписывается в виде:

Все 5-значные числа, составленные из цифр 0, 1, 2, записаны в порядке возрастания. Вот начало списка:

1. 00012
2. 00020
3. 00021
4. 00022
5. 00100

.....

На каком месте списка находится число 21012?

Число 21012 записано в троичной системе счисления. После преобразования его в десятичное получаем:

$$21012_3 = 2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 2 \cdot 81 + 27 + 3 + 2 = 192$$

Чтобы определить номер позиции в списке для числа 192, учитывается «рассогласование» между значениями чисел и их порядковыми номерами в списке:

Последовательность чисел начинается с $12_3 = 5$;

Нумерация чисел в списке начинается с единицы.

Для определения номера позиции числа 192 составляется соответствие:

Порядковый номер	Значение числа
$1 = (5 - 4)$	5
$192 - 4$	192

Очевидно, что десятичное число 192 будет стоять в списке на 188-м месте (так как значение числа на 4 больше, чем порядковый номер).

Ответ: 188.

6. Сколько существует различных символьных последовательностей длины 5 в трехбуквенном алфавите К, О, Т, которые содержат ровно две буквы О?

Решение: (с использованием формул комбинаторики)

В последовательности из 5 букв должно быть две буквы О и, соответственно, три другие буквы. Сначала находим количество перестановок с повторениями из двух букв О и трех произвольных букв (обозначим их символом «#»).

Формула для вычисления количества перестановок с повторениями:

$$P = \frac{n!}{n_1!n_2!}$$
 где n – общее количество букв в слове, n_1 – количество обязательных букв (в данном случае букв О), n_2 – количество прочих букв (т.е. знаков #).

Количество перестановок с повторениями будет равно:

$$P = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \times 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10.$$

В остальных трех позициях слова (кроме тех, что заняты двумя буквами О) может стоять любая из двух оставшихся букв – К или Т. Следовательно, нужно вычислить количество всех возможных трехбуквенных слов, состоящих из двух возможных букв. Оно равно $2^3 = 8$.

Ответ: 80.

7. Составляется таблица кодовых слов для передачи сообщений, где каждому сообщению должно быть сопоставлено отдельное кодовое слово из 4 букв. В этих кодовых словах можно использовать только пять букв: Л, О, Г, И, К, при этом буква Л может быть использована ровно один раз, а все остальные

буквы могут встречаться в кодовом слове сколько угодно раз (или отсутствовать).

Сколько различных кодовых слов можно получить по этой таблице?

Решение:

Выпишем все возможные варианты 4-буквенных слов с ровно одной буквой Л: Л***, *Л**, **Л* или ***Л (где * обозначает любые другие буквы).

Получили 4 возможных варианта.

Вариантов распределения четырех оставшихся в нашем алфавите букв в трех позициях кодовых слов столько же, сколько возможно трехзначных чисел в системе счисления с основанием 4, т.е. $4^3 = 64$.

Тогда всего возможных кодовых слов: $4 \cdot 64 = 256$.

Ответ: 256.

8. Маша составляет шестибуквенные слова перестановкой букв слова КАПКАН. При этом она избегает слов с двумя подряд одинаковыми буквами. Сколько различных кодов может составить Маша?

Решение:

Если не учитывать, что в слове есть одинаковые буквы, общее количество перестановок 6 букв равно $6! = 720$.

Так как перестановка пары одинаковых букв не дает нового слова, каждая пара уменьшает количество уникальных слов в 2 раза; а у нас 2 пары (повторяются К и А), поэтому количество уникальных слов – в 4 раза меньше, оно равно $720/4 = 180$.

Теперь из 180 нужно вычесть количество слов, где встречаются пары КК и АА. Для этого сначала найдем количество слов, в которых встречаются обе пары, и КК, и АА; обозначим $X = КК$, $Y = АА$.

Таким образом, нужно найти количество слов из 4-х разных «букв» (Н, П, Х, Y), это количество равно $4! = 24$.

Далее подсчитаем слова, в которых есть $X = КК$, но нет $АА$; получаем набор из 5 «букв» (А, А, Н, П, Х), количество уникальных слов равно $5!/2 = 60$ (учитывая, что перестановка букв А не меняет слово); кроме того, среди них есть еще 24 слова, в которых есть обе пары, то есть имеем $60 - 24 = 36$ слов, где есть КК, но нет АА.

Аналогично получаем, что есть 36 слов, где есть АА, но нет КК.

Количество нужных нам слов равно $180 - 24 - 36 - 36 = 84$.

Ответ: 84.

9. Сколько существует различных символьных последовательностей длины 5 в четырехбуквенном алфавите {А, С, G, Т}, которые содержат ровно две буквы А?

Решение (вариант 1, перебор):

Рассмотрим различные варианты слов из 5 букв, которые содержат две буквы А и начинаются с А:

АА***

А*А**

А**А*

А***А

Звездочка обозначает любой символ из набора {С, G, Т}, то есть один из трех символов.

Заметим, что во всех шаблонах есть 3 позиции, каждую из которых можно заполнить тремя способами, поэтому общее число комбинаций (для каждого шаблона!) равно $3^3 = 27$.

Всего 4 шаблона, они дают $4 \cdot 27 = 108$ комбинаций.

Теперь рассматриваем шаблоны, где первая по счету буква А стоит на второй позиции, их всего три:

*АА**

*А*А*

*А***А

Они дают $3 \cdot 27 = 81$ комбинацию.

Два шаблона, где первая по счету буква А стоит на третьей позиции:

**АА*

**А*А

Они дают $2 \cdot 27 = 54$ комбинации.

Один шаблон, где сочетание АА стоит в конце:

***АА

Он дает 27 комбинаций.

Всего получаем $(4 + 3 + 2 + 1) \cdot 27 = 270$ комбинаций

Ответ: 270.

Решение (вариант 2, использование формул комбинаторики):

В последовательности из 5 символов нужно использовать ровно две буквы А и три символа, не совпадающих с А, которые обозначим звездочкой.

Сначала найдем количество перестановок из двух букв А и трех звездочек.

Используем формулу для вычисления числа перестановок с повторениями; для двух разных символов она выглядит так:

$$P(n_A, n_*) = \frac{(n_A + n_*)!}{n_A! n_*!}$$

Здесь n_A – количество букв А, n_* – количество звездочек и восклицательный знак обозначает *факториал* натурального числа, то есть произведение всех натуральных чисел от 1 до n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

В нашем случае $n_A = 2$ и $n_* = 3$, так что получаем:

$$P(2,3) = \frac{(2+3)!}{2!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

Теперь разберемся со звездочками: вместо каждой из них может стоять любой из трех символов (кроме А), то есть на каждую из 10 перестановок мы имеем $3^3 = 27$ вариантов распределения остальных символов на месте звездочек.

Таким образом, получаем всего $10 \cdot 27 = 270$ вариантов.

Ответ: 270.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вася составляет 5-буквенные слова, в которых есть только буквы С, Л, О, Н, причем буква С используется в каждом слове ровно 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

Ответ: 405.

2. Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в алфавитном порядке.

Вот начало списка:

1. ААААА

2. ААААО

3. ААААУ

4. АААОА

.....

Запишите слово, которое стоит на 240-м месте от начала списка.

Ответ: УУУОУ.

3. Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в **обратном** алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. УУУУУ
2. УУУУО
3. УУУУА
4. УУУОУ

.....

Запишите слово, которое стоит на 240-м месте от начала списка.

Ответ: АААОА.

4. Все 4-буквенные слова, составленные из букв К, Л, Р, Т, записаны в алфавитном порядке и пронумерованы. Вот начало списка:

1. КККК
2. КККЛ
3. КККР
4. КККТ

.....

Запишите слово, которое стоит на 67-м месте от начала списка.

Ответ: ЛККР.

5. Все 5-буквенные слова, составленные из 5 букв А, К, Л, О, Ш, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААК
3. ААААЛ
4. ААААО
5. ААААШ
6. АААКА

.....

На каком месте от начала списка стоит слово ШКОЛА?

Ответ: 2711.

6. Сколько существует различных символьных последовательностей длины 3 в четырехбуквенном алфавите {A,B,C,D}, если известно, что одним из соседей A обязательно является D, а буквы B и C никогда не соседствуют друг с другом?

Ответ: 405.

7. Палиндром – это символьная строка, которая читается одинаково в обоих направлениях. Сколько различных 6-символьных палиндромов можно составить из строчных латинских букв? (В латинском алфавите 26 букв).

Ответ: 17576.

8. Разведчик кодирует символы текста четырьмя стрелками. Каждая стрелка может иметь четыре положения (направления): $\uparrow \rightarrow \downarrow \leftarrow$. Для первой стрелки запрещено положение вверх: \uparrow . Вторая и третья стрелки не могут находиться в одинаковом положении (направлении). Сколько всего различных символов текста может закодировать разведчик?

Ответ: 144.

9. Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААО
3. ААААУ
4. АААОА
-

Запишите слово, которое стоит на 125-м месте от начала списка.

Ответ: ООУОУ.

10. Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААО
3. ААААУ
4. АААОА
-

Укажите номер слова ОАОАО.

Ответ: 92.

11. Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, К, Р, У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ААААА

2. ААААК

3. ААААР

4. ААААУ

5. АААКА

.....

Укажите номер первого слова, которое начинается с буквы У.

Ответ: 769.

12. Сколько существует чисел, шестнадцатеричная запись которых содержит 4 цифры, причем все цифры различны и никакие две четные и две нечетные цифры не стоят рядом.

Ответ: 5880.

13. Сколько существует различных символьных последовательностей длины 4 в трехбуквенном алфавите {К, О, Т}, которые содержат ровно две буквы О?

Ответ: 24.

14. Сколько слов длины 4, начинающихся с согласной буквы и заканчивающихся гласной буквой, можно составить из букв М, Е, Т, Р, О? Каждая буква может входить в слово несколько раз. Слова не обязательно должны быть осмысленными словами русского языка.

Ответ: 150.

15. Сколько существует способов разместить на книжной полке шесть книг, среди которых имеются четыре тома романа «Война и мир», которые должны стоять рядом (но не обязательно по порядку)?

Ответ: 144.

ЗАДАНИЕ № 11. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННОГО ОБЪЕМА СООБЩЕНИЯ

Согласно спецификации контрольно-измерительных материалов для проведения в 2022 году единого государственного экзамена по информатике задание № 11 проверяет умение подсчитывать информационный объем сообщения.

Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору):

1.1.3. Дискретное (цифровое) представление текстовой, графической, звуковой информации и видеоинформации. Единицы измерения количества информации

Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору):

1.3.1. Умение оценивать объем памяти, необходимый для хранения информации.

Задание относится к повышенному уровню сложности, не требует для решения специального программного обеспечения и рассчитано на 3 минуты.

В демонстрационном варианте 2022 года задание № 11 имеет следующий вид:

При регистрации в компьютерной системе каждому объекту сопоставляется идентификатор, состоящий из 15 символов и содержащий только символы из 8-символьного набора: A, B, C, D, E, F, G, H. В базе данных для хранения сведений о каждом объекте отведено одинаковое и минимально возможное целое число байт. При этом используют посимвольное кодирование идентификаторов, все символы кодируют одинаковым и минимально возможным количеством бит. Кроме собственно идентификатора, для каждого объекта в системе хранятся дополнительные сведения, для чего отведено 24 байта на один объект. Определите объем памяти (в байтах), необходимый для хранения сведений о 20 объектах. В ответе запишите только целое число – количество байт.

Решение:

- 1) Найдем мощность алфавита: $M = 8$.
- 2) Найдем информационный объем одного символа. Подставим в формулу:

$i = \log_2 M$, $i = \log_2 8 = 3$ бита – такое количество информации несет один символ в идентификаторе.

3) Найдем информационный объем одного идентификатора объекта:

$$45 \cdot 3 = 135 \text{ бит} \approx 17 \text{ байт.}$$

4) Теперь находим количество информации (в байтах) на один объект (информационный объем одного идентификатора вместе с дополнительными сведениями): $24 + 17 = 41$ байт.

5) Определим объем памяти (в байтах), необходимый для хранения сведений о 20 объектах: $41 \cdot 20 = 820$ байт.

Ответ: 820 байт.

Что нужно знать для выполнения задания:

- с помощью K бит можно закодировать $Q = 2^K$ различных вариантов (чисел);
- таблицу степеней двойки, она же показывает, сколько вариантов Q можно закодировать с помощью K бит:

K, бит	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q, вариантов	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

- при измерении количества информации принимается, что в одном байте 8 бит, а в одном килобайте (1 Кбайт) – 1024 байта, в мегабайте (1 Мбайт) – 1024 Кбайта, в гигабайте (1 Гбайт) – 1024 Мбайта;
- чтобы найти информационный объем сообщения (текста) I , нужно умножить количество символов (отсчетов) N на число бит на символ (отсчет) K : $I = N \cdot K$;
- две строчки текста не могут занимать 100 Кбайт в памяти;
- мощность алфавита M – это количество символов в этом алфавите;
- если алфавит имеет мощность M , то количество всех возможных «слов» (символьных цепочек) длиной N (без учета смысла) равно $Q = M^N$; для двоичного кодирования (мощность алфавита $M = 2$ символа) получаем известную формулу: $Q = 2^N$;
- правило для измерения информации с точки зрения алфавитного подхода:
 1. Найти мощность алфавита – M .

2. Найти информационный объем одного символа – $i = \log_2 M$.
3. Найти количество символов в сообщении К.
4. Найти информационный объем всего сообщения – $I = K \cdot i$.

Базовые задачи

1. Сообщение записано с помощью алфавита, содержащего 8 символов. Какое количество информации несет одна буква этого алфавита?

Дано: $M = 8$.

Найти: $i = ?$

Решение:

Мощность алфавита – 8 символов, установим, какое количество информации несет одна буква $i = \log_2 M$, $i = \log_2 8 = 3$ бита.

Ответ: 3.

2. Найти объем (в битах) текста, записанного на языке, алфавит которого содержит 128 символов и 2000 символов в сообщении.

Дано: $K = 2000$, $M = 128$ (мощность алфавита).

Найти: $I = ?$

Решение:

1) Находим информационный объем одного символа $i = \log_2 M$ $i = \log_2 128 = 7$ бит – объем одного символа.

2) Находим объем всего текста: $I = i \cdot k$ $I = 7 \cdot 2000 = 14000$ бит.

Ответ: 14000.

3. Найти объем информации, содержащейся в тексте из 3000 символов, написанном русскими буквами. Ответ запишите в битах.

Дано: $K = 3000$

Найти: $I = ?$

Решение:

1) Найдем мощность алфавита.

2) $M = 33$ русских прописных буквы + 33 русских строчных букв = 66 букв.

3) Найдем информационный объем одного символа. Подставим в формулу $i = \log_2 M$ и рассчитаем количество информации:

$i = \log_2 66 = 7$ бит такое количество информации несет один символ в русском тексте.

4) Теперь находим количество информации во всем тексте, для этого нужно найти общее количество символов в нем и умножить на информационный объем одного символа. По условию задачи в тексте 3000 символов, значит:

$$I = 7 \cdot 3000 = 21000 \text{ бит.}$$

Ответ: 21000.

4. Информационное сообщение объемом 4 Кбайта содержит 4096 символов. Сколько символов содержит алфавит, при помощи которого было записано это сообщение?

Дано: $K = 4096$, $I = 4$ Кбайта

Найти: $M = ?$ (M – мощность алфавита)

Решение:

1) $M = 2^i$, неизвестно i – информационный объем одного символа.

2) $I = K \cdot i$, $i = I/K = 4 \cdot 1024 \cdot 8/4096 = 8$ бит – объем одного символа.

3) $M = 2^8 = 256$ символов – мощность алфавита.

Ответ: 256.

5. Для записи сообщения использовался 64-символьный алфавит. Каждая страница содержит 30 строк. Все сообщение содержит 8775 байтов информации и занимает 6 страниц. Сколько символов в строке?

Дано: $M = 64$, $N = 6$, $x = 30$, $I = 8775$ байтов.

Найти: $y = ?$

Решение:

1) Запишем формулу для нахождения общего количества символов в тексте $K = x \cdot y \cdot N$ (K – общее количество символов в тексте, x – количество строк на одной странице, y – количество символов в строке), $y = K/(x \cdot N)$.

2) Количество символов в тексте также можно найти по формуле: $K = I/i$ (где I – общий объем информации в сообщении, i – информационный объем одного символа).

3) Найдем информационный объем одного символа $i = \log_2 M$

$$i = \log_2 64 = 6 \text{ бит.}$$

4) Найдем общее количество символов в тексте $K = 8775 \cdot 8/6 = 11700$.

5) $y = 11700 / (30 \cdot 6) = 65$ символов в строке.

Ответ: 65.

6. Информационная панель может отображать сообщения, состоящие из 10 цифр, причем каждая цифра может быть трех цветов. Цифры и цвета могут повторяться. Контроллер панели выделяет под каждое сообщение одинаковое и минимально возможное целое число байт. При этом используется посимвольное кодирование, все символы сообщения кодируются одинаковым минимально возможным количеством бит. Укажите объем памяти в байтах для хранения 100 сообщений.

Решение:

- 1) На панели 10 позиций, каждая позиция – это цифра, которая может гореть одним из трех цветов.
- 2) Подсчитаем, сколько сигналов можно закодировать с помощью одной позиции панели: выбираем 1 из 10 цифр, и кроме того (независимо от цифры!) один из трех цветов; поэтому общее количество вариантов: $10 \cdot 3 = 30$.
- 3) Для кодирования 30 вариантов нужно 5 битов ($2^4 < 30 \leq 2^5$).
- 4) Для кодирования состояния 10 позиций панели нужно $10 \cdot 5 = 50$ битов или 6,25 байтов, округляем вверх до 7 байтов (на одно сообщение).
- 5) На кодирование 100 сообщений требуется $100 \cdot 7 = 700$ байт.

Ответ: 700.

7. При регистрации в компьютерной системе каждому пользователю выдается пароль, состоящий из 11 символов. Из соображений информационной безопасности каждый пароль должен содержать хотя бы 2 десятичных цифры, как прописные, так и строчные латинские буквы, а также не менее 2-х символов из 6-символьного набора: &, #, \$, *, !, @. В базе данных для хранения сведений о каждом пользователе отведено одинаковое и минимально возможное целое число байт. При этом используют посимвольное кодирование паролей, все символы кодируют одинаковым и минимально возможным количеством бит. Кроме собственно пароля, для каждого пользователя в системе хранятся дополнительные сведения, для чего выделено целое число байт; это число одно и то же для всех пользователей. Для хранения сведений о 30 пользователях потребовалось 900 байт. Сколько байт выделено для хранения дополнительных

сведений об одном пользователе? В ответе запишите только целое число – количество байт.

Решение:

- 1) Если бы мы знали точно, сколько цифр и сколько специальных символов содержит пароль и где точно они расположены, можно было бы использовать «раздельное» кодирование: на кодирование цифр использовать по 4 бита ($2^4 > 10$), на кодирование спецсимволов – по 3 бита ($2^3 > 6$), а на кодирование остальных символов (латинских букв) – по 6 бит ($2^6 > 26 \cdot 2 = 52$).
- 2) Поскольку количество и месторасположение цифр и спецсимволов в пароле неизвестно, нужно рассматривать полный набор символов: $10 + 6 + 26 \cdot 2 = 68$.
- 3) При этом на каждый символ нужно выделить 7 бит ($2^7 > 68$).
- 4) На 11 символов пароля выделяется 77 бит. Округляя вверх до целого числа байт, получаем 10 байт (80 бит) на пароль.
- 5) На одного пользователя выделяется $900:30 = 30$ байт.
- 6) На дополнительную информацию остается $30 - 10 = 20$ байт.

Ответ: 20.

8. При регистрации в компьютерной системе каждому пользователю выдается пароль, состоящий из 15 символов и содержащий только символы Ш, К, О, Л, А (таким образом, используется 5 различных символов). Каждый такой пароль в компьютерной системе записывается минимально возможным и одинаковым целым количеством байт (при этом используют посимвольное кодирование и все символы кодируются одинаковым и минимально возможным количеством бит). Укажите объем памяти в байтах, отводимый этой системой для записи 30 паролей. В ответе запишите только число, слово «байт» писать не нужно.

Решение:

- 1) Согласно условию, в пароле можно использовать 5 символов.
- 2) Для кодирования номера одного из 5 символов нужно выделить 3 бита памяти (они позволяют закодировать $2^3 = 8$ вариантов).
- 3) Для хранения всех 15 символов пароля нужно $15 \cdot 3 = 45$ бит.

4) Поскольку пароль должен занимать целое число байт, берем ближайшее большее (точнее, не меньшее) значение, которое кратно 8: это $48 = 6 \cdot 8$; то есть один пароль занимает 6 байт.

5) Следовательно, 30 паролей занимают $6 \cdot 30 = 180$ байт.

Ответ: 180.

9. Для регистрации на сайте некоторой страны пользователю требуется придумать пароль. Длина пароля – ровно 11 символов. В качестве символов используются десятичные цифры и 12 различных букв местного алфавита, причем все буквы используются в двух начертаниях: как строчные, так и заглавные (регистр буквы имеет значение!).

Под хранение каждого такого пароля на компьютере отводится минимально возможное и одинаковое целое количество байтов, при этом используется посимвольное кодирование и все символы кодируются одинаковым и минимально возможным количеством бит. Определите объем памяти в байтах, который занимает хранение 60 паролей.

Решение:

1) Согласно условию, в пароле можно использовать 10 цифр (0..9) + 12 заглавных букв местного алфавита + 12 строчных букв, всего $10 + 12 + 12 = 34$ символа.

2) Для кодирования номера одного из 34 символов нужно выделить 6 бит памяти (5 бит не хватает, они позволяют закодировать только $2^5 = 32$ варианта).

3) Для хранения всех 11 символов пароля нужно $11 \cdot 6 = 66$ бит.

4) Поскольку пароль должен занимать целое число байт, берем ближайшее большее (точнее, не меньшее) значение, которое кратно 8: это $72 = 9 \cdot 8$; то есть один пароль занимает 9 байт.

5) Следовательно, 60 паролей занимают $9 \cdot 60 = 540$ байт.

Ответ: 540.

10. В велокроссе участвуют 119 спортсменов. Специальное устройство регистрирует прохождение каждым из участников промежуточного финиша, записывая его номер с использованием минимально возможного количества бит, одинакового для каждого спортсмена. Каков информационный объем в битах

сообщения, записанного устройством, после того как промежуточный финиш прошли 70 велосипедистов?

Решение:

- 1) Велосипедистов было 119, у них 119 разных номеров, то есть нам нужно закодировать 119 вариантов.
- 2) По таблице степеней двойки находим, что для этого нужно минимум 7 бит (при этом можно закодировать 128 вариантов, то есть еще есть запас); итак, 7 бит на один отсчет.
- 3) Когда 70 велосипедистов прошли промежуточный финиш, в память устройства записано 70 отсчетов.
- 4) Поэтому в сообщении $70 \cdot 7 = 490$ бит информации.

Ответ: 490.

Задачи для самостоятельного решения

1. При регистрации в компьютерной системе каждому пользователю выдается пароль, состоящий из 15 символов и содержащий только символы из 8-символьного набора: A, B, C, D, E, F, G, H. В базе данных для хранения сведений о каждом пользователе отведено одинаковое минимально возможное целое число байт. При этом используют посимвольное кодирование паролей, все символы кодируют одинаковым минимально возможным количеством бит. Кроме собственно пароля для каждого пользователя в системе хранятся дополнительные сведения, для чего выделено целое число байт, одно и то же для всех пользователей. Для хранения сведений о 20 пользователях потребовалось 320 байт.

Сколько байт выделено для хранения дополнительных сведений об одном пользователе? В ответе запишите только целое число — количество байт.

Ответ: 10.

2. В некоторой стране автомобильный номер длиной 6 символов составляют из заглавных букв (используются только 20 различных букв) и десятичных цифр в любом порядке. Каждый такой номер в компьютерной программе записывается минимально возможным и одинаковым целым количеством байт (при этом используют посимвольное кодирование и все символы кодируются одинаковым и минимально возможным количеством бит).

Определите объем памяти (в байтах), отводимый этой программой для записи 30 номеров.

Ответ: 120.

3. При регистрации в компьютерной системе каждому пользователю выдается пароль, состоящий из 15 символов и содержащий только символы Ш, К, О, Л, А (таким образом, используется 5 различных символов). Каждый такой пароль в компьютерной системе записывается минимально возможным и одинаковым целым количеством байт (при этом используют посимвольное кодирование и все символы кодируются одинаковым и минимально возможным количеством бит). Укажите объем памяти в байтах, отводимый этой системой для записи 30 паролей. В ответе запишите только число.

Ответ: 180.

4. При регистрации в компьютерной системе каждому пользователю выдается пароль, состоящий из 15 символов и содержащий только символы из 12-символьного набора: А, В, С, D, E, F, G, H, K, L, M, N. В базе данных для хранения сведений о каждом пользователе отведено одинаковое и минимально возможное целое число байт. При этом используют посимвольное кодирование паролей, все символы кодируют одинаковым и минимально возможным количеством бит. Кроме собственно пароля, для каждого пользователя в системе хранятся дополнительные сведения, для чего выделено целое число байт; это число одно и то же для всех пользователей. Для хранения сведений о 20 пользователях потребовалось 400 байт. Сколько байт выделено для хранения дополнительных сведений об одном пользователе? В ответе запишите только целое число — количество байт.

Ответ: 12.

5. В велокроссе участвуют 56 спортсменов. Специальное устройство регистрирует прохождение каждым из участников промежуточного финиша, записывая его номер с использованием минимально возможного количества бит, одинакового для каждого спортсмена. Какой объем памяти (в байтах) будет использован устройством, когда все спортсмены прошли промежуточный финиш?

Ответ: 42.

ЗАДАНИЕ № 14. ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Согласно спецификации контрольно-измерительных материалов для проведения в 2022 году единого государственного экзамена по информатике задание № 14 проверяет знание позиционных систем счисления..

Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору):

1.4.1. Позиционные системы счисления.

Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору):

1.1.3. Умение строить информационные модели объектов, систем и процессов в виде алгоритмов.

Задание относится к повышенному уровню сложности, не требует для решения специального программного обеспечения и рассчитано на 3 минуты.

В демонстрационном варианте 2022 года задание № 14 имеет следующий вид:

Значение арифметического выражения:

$$3 \cdot 4^{38} + 2 \cdot 4^{23} + 4^{20} + 3 \cdot 4^5 + 2 \cdot 4^4 + 1$$

Записали в системе счисления с основанием 16. Сколько значащих нулей содержится в этой записи?

Решение:

Запишем все слагаемые в системе счисления с основанием 16, для этого выполним следующие преобразования.

$$3 \cdot 4^{30} + 2 \cdot 4^{23} + 4^{20} + 3 \cdot 4^5 + 2 \cdot 4^4 + 1 = 3 \cdot (4^2)^{19} + 2 \cdot 4 \cdot (4^2)^{11} + (4^2)^{10} + 3 \cdot 4 \cdot (4^2)^2 + 2 \cdot (4^2)^2 + 1 = 3 \cdot (16)^{19} + 8 \cdot (16)^{11} + (16)^{10} + 12 \cdot (16)^2 + 2 \cdot (16)^2 + 1.$$

$$\text{Заметим, что } 12 \cdot (16)^2 + 2 \cdot (16)^2 = 14 \cdot (16)^2 \text{ и } 14 \cdot (16)^2 = E_{16} \cdot (16)^2.$$

Поэтому

$$3 \cdot (16)^{19} + 8 \cdot (16)^{11} + (16)^{10} + 12 \cdot (16)^2 + 2 \cdot (16)^2 + 1 = 3 \cdot (16)^{19} + 8 \cdot (16)^{11} + (16)^{10} + 14 \cdot (16)^2 + 1 = 3 \cdot (16)^{19} + (8 \cdot (16)^{11} + (16)^{10} + E_{16} \cdot (16)^2 + 1).$$

Важно, чтобы все слагаемые были записаны в порядке убывания показателей степени.

$$10^N - 1 = \underbrace{9 \dots 9}_N$$

- число $10^N - 10^M = 10^M \cdot (10^{N-M} - 1)$ записывается как $N-M$ девяток, за которыми стоят M нулей:

$$10^N - 10^M = \underbrace{9 \dots 9}_{N-M} \underbrace{0 \dots 0}_M$$

- число 2^N в двоичной системе записывается как единица и N нулей:

$$2^N = \underbrace{10 \dots 0}_N$$

- число $2^N - 1$ в двоичной системе записывается как N единиц:

$$2^N - 1 = \underbrace{1 \dots 1}_N$$

- число $2^N - 2^K$ при $K < N$ в двоичной системе записывается как $N-K$ единиц и K нулей:

$$2^N - 2^K = \underbrace{1 \dots 1}_{N-K} \underbrace{0 \dots 0}_K$$

- поскольку $2^N + 2^N = 2 \cdot 2^N = 2^{N+1}$, получаем $2^N = 2^{N+1} - 2^N$, откуда следует, что $-2^N = -2^{N+1} + 2^N$

- число 3^N записывается в троичной системе как единица и N нулей:

$$3^N = \underbrace{10 \dots 0}_N$$

- число $3^N - 1$ записывается в троичной системе как N двоек:

$$3^N - 1 = \underbrace{2 \dots 2}_N$$

- число $3^N - 3^M = 3^M \cdot (3^{N-M} - 1)$ записывается в троичной системе как $N-M$ двоек, за которыми стоят M нулей:

$$3^N - 3^M = \underbrace{2 \dots 2}_{N-M} \underbrace{0 \dots 0}_M 3$$

Можно сделать аналогичные выводы для любой системы счисления с основанием a :

- число a^N в системе счисления с основанием a записывается как единица и N нулей:

$$a^N = \underbrace{10 \dots 0}_N$$

- число $a^N - 1$ в системе счисления с основанием a записывается как N старших цифр этой системы счисления, то есть цифр $(a - 1)$:

$$a^N - 1 = \underbrace{(a-1)(a-1) \dots (a-1)}_N$$

- число $a^N - a^M = a^M \cdot (a^{N-M} - 1)$ записывается в системе счисления с основанием a как $N-M$ старших цифр этой системы счисления, за которыми стоят M нулей:

$$a^N - a^M = \underbrace{(a-1) \dots (a-1)}_{N-M} \underbrace{0 \dots 0}_M$$

Базовые задачи

1. Запишите выражение в виде степени:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Решение:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

Ответ: 2^5 .

2. Записать 1, 2, 3 степени числа 10 в виде суммы степеней двойки.

Ответ:

$$10^1 = 2^3 + 2^1$$

$$10^2 = 2^6 + 2^5 + 2^2$$

$$10^3 = 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3$$

3. Запишите слагаемые арифметического выражения в системе счисления с основанием 7: $49^7 + 49^{21}$.

Решение:

$$49^7 = (7^2)^7 = 7^{14}$$

$$49^{21} = (7^2)^{21} = 7^{42}$$

$$49^7 + 49^{21} = 7^{14} + 7^{42}$$

Ответ: $7^{14} + 7^{42}$.

4. Запишите слагаемые арифметического выражения в порядке убывания степеней

$$3^{15} + 3^{14} - 9^8 + 3^{21}$$

Решение:

$$3^{15} + 3^{14} - 3^8 + 3^{21} = 3^{21} + 3^{15} + 3^{14} - 3^8$$

Ответ: $3^{21} + 3^{15} + 3^{14} - 3^8$.

5. Упростить арифметическое выражение $3 \cdot 5^{15} + 2 \cdot 5^{15} - 5^{10}$

Решение:

$$3 \cdot 5^{15} + 2 \cdot 5^{15} - 5^{10} = 5 \cdot 5^{15} - 5^{10} = 5^{16} - 5^{10}$$

Ответ: $5^{16} - 5^{10}$.

6. Выполните сложение:

$$1001001_2 + 10101_2$$

Решение:

$$1001001_2$$

$$+ \underline{10101_2}$$

$$1011110_2$$

Ответ: 1011110_2 .

7. Выполните вычитание:

$$10001000_2 - 1110011_2$$

Решение:

$$10001000$$

$$- \underline{1110011}$$

$$10101$$

Ответ: 10101_2 .

8. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 17_{10} оканчивается на 2.

Решение:

Последняя цифра в записи числа представляет собой остаток от деления числа на основание системы счисления $17 - 2 = 15$. Найдем делители числа 15 – это числа 3, 5, 15. Проверим свой ответ тем, что запишем число 17 в указанных системах счисления.

$$17_{10} = 122_3 = 32_5 = 12_{15}.$$

Ответ: 3, 5, 15.

9. Сколько единиц в двоичной записи выражения $4^{2015} - 2^{2014} + 3$?

Решение:

Число 2^k ($4^k, 8^k$ и т.д.) всегда записывается в двоичной системе как единица с соответствующим количеством нулей. Разность $2^k - 2^n$ при $k > n$ выглядит в двоичной системе счисления как $k - n$ единиц с соответствующими n нулями. Этот факт – наглядный результат выполнения в двоичной системе алгоритма вычитания «в столбик» (с заёмом единицы в старшем разряде). Убедиться в справедливости этого правила можно, записав в двоичной системе значение разности $128 - 32 = (2^7 - 2^5) = 96 = 64 + 32 = 1100000_2$.

Таким образом, число 4^{2015} записывается в двоичной системе счисления как единица с последующими 4030 нулями. Разность $4^{2015} - 2^{2014}$ выглядит как 2016 единиц и последующие 2014 нулей, а прибавление числа $3 = 11_2$ к этой разности заменяет два последних нуля единицами (все по алгоритму сложения в столбик). Итак, в двоичной записи этого выражения 2018 единиц.

Ответ: 2018.

10. Значение арифметического выражения $9^8 + 3^5 - 9$ – записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

Решение:

Сначала запишем первое и второе слагаемое в системе счисления с основанием 3.

$$9^8 = 3^{(2 \cdot 8)} = 3^{16} = 10\,000\,000\,000\,000\,000_3 \text{ (единица и 16 нулей).}$$

$$3^5 = 100\,000_3 \text{ (единица и 5 нулей).}$$

Их сумма в троичной системе счисления записывается с помощью 2 единицы и 15 нулей:

$$10\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000_3 + 100\ 000_3 = 10\ 000\ 000\ 000\ 100\ 000_3.$$

Запишем число 9 в той же системе счисления: $9 = 3^2 = 100_3$. Теперь выполним вычитание в той же троичной системе: $10\ 000\ 000\ 000\ 100\ 000_3 - 100_3 = 10\ 000\ 000\ 000\ 022\ 200_3$. В записи числа 3 цифры «2» одна единица и 13 нулей. Общее количество цифр по-прежнему 17.

Данное вычитание можно было произвести «в столбик» с переносом единицы в младший разряд. При записи чисел в десятичной системе счисления единица старшего разряда превращается в 10 единиц соседнего младшего разряда, в троичной системе она превращается в три единицы (а в двоичной – в две).

Обратите внимание, что для данной задачи совсем неважно, какая разрядность у первого слагаемого. Двойки заменяют нули только в середине записи числа. Общее правило остается неизменным: число $3^n - 3^m$ ($n > m$) при записи в троичной системе будет содержать $n - m$ двоек и m нулей.

Ответ: 3.

11. Значение арифметического выражения: $49^7 + 7^{21} - 7$ – записали в системе счисления с основанием 7. Сколько цифр 6 содержится в этой записи?

Решение:

Сначала запишем первое и второе слагаемое в системе счисления с основанием 7:

$$49^7 = 7^{(2 \cdot 7)} = 7^{14} = 100\ 000\ 000\ 000\ 000_7 \text{ (единица и 14 нулей).}$$

$$7^{21} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000_7 \text{ (единица и 21 ноль).}$$

Второе слагаемое оказалось больше первого. Их сумма в системе счисления с основанием 7 записывается с помощью 2 единиц и 20 нулей:

$$1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000_7 + 100\ 000\ 000\ 000\ 000_7 =$$

$$1\ 000\ 000\ 100\ 000\ 000\ 000\ 000_7.$$

Запишем число 7 в той же системе счисления: $7_{10} = 10_7$. Теперь выполним вычитание в той же системе счисления:

$$1\ 000\ 000\ 100\ 000\ 000\ 000\ 000_7 - 10_7 = 1\ 000\ 000\ 066\ 666\ 666\ 666\ 660_7.$$

В этой записи 13 цифр «6», одна единица и 8 нулей. Общее количество цифр по-прежнему 22.

Обратите внимание, что для данной задачи очень важно определить, какое из чисел больше. Ответ будет зависеть от того, какая разрядность у меньшего слагаемого. Шестерки заменяют нули только в середине записи числа. Общее правило остается неизменным: число $7^n - 7^m$ ($n > m$) при записи в системе счисления с основанием 7 будет содержать $n - m$ двоек и m нулей.

Ответ: 13.

12. Значение арифметического выражения: $64^{10} + 2^{90} - 16$ записали в системе счисления с основанием 8. Сколько цифр «7» содержится в этой записи?

Решение (1-й способ):

1) Приведем все числа к степеням восьмерки, учитывая, что $16 = 64 - 48 = 8^2 - 6 \cdot 8^1$:

$$64^{10} + 2^{90} - 16 = (8^2)^{10} + 2^{3 \cdot 30} - (8^2 - 48) = 8^{20} + 8^{30} - 8^2 + 6 \cdot 8^1.$$

2) Перепишем выражение, располагая степени восьмерки в порядке убывания:

$$8^{20} + 8^{30} - 8^2 + 6 \cdot 8^1 = 8^{30} + 8^{20} - 8^2 + 6 \cdot 8^1$$

3) Очевидно, что «семерки» в восьмеричной записи значения выражения возникнут только за счет вычисления разности $8^{20} - 8^2$, их количество равно $20 - 2 = 18$.

Ответ: 18.

Решение (2-й способ с использованием программы в среде Pascal ABC)

В среде Pascal ABC задача может быть решена с помощью программы:

```
Program m1;
```

```
var
```

```
  a: BigInteger;
```

```
  k: int64;
```

```
begin
```

```
  a := BigInteger.Pow (64, 10) + BigInteger.Pow (2, 90) - 16;
```

```
  k := 0;
```

```
  while (a > 0) do
```

```
    begin
```

```

if (a mod 8 = 7) then
    k := k + 1;
    a := a div 8;
end;
writeln(k);
end.

```

Ответ: 18.

13. Значение арифметического выражения: $9^9 - 3^9 + 9^{19} - 19$ записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

Решение:

- 1) Приведем все числа к степеням тройки, учитывая, что $19 = 27 - 8 = 3^3 - (2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0)$:
 $9^9 - 3^9 + 9^{19} - 19 = (3^2)^9 - 3^9 + (3^2)^{19} - (3^3 - (2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0)) = 3^{18} - 3^9 + 3^{38} - 3^3 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$
- 2) Перепишем выражение, располагая степени тройки в порядке убывания:
 $3^{18} - 3^9 + 3^{38} - 3^3 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 3^{38} + 3^{18} - 3^9 - 3^3 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$.
- 3) Сначала рассмотрим часть выражения, в которой имеется два расположенных подряд «минуса»: $3^{18} - 3^9 - 3^3$:
 - a. найдем разность двух крайних чисел: $3^{18} - 3^3$, в ее троичной записи $18 - 3 = 15$ «двоек» и 3 «нуля»;
 - b. вычтем из этого числа значение 3^9 : одна из «двоек» (на 10-й справа позиции) уменьшится на 1, остальные цифры не изменятся;
 - c. итак, троичная запись разности $3^{18} - 3^9 - 3^3$ содержит $15 - 1 = 14$ «двоек», одну «единицу» и 3 «нуля».
- 4) Прибавим к полученному значению сумму: $2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 22_3$. В троичной записи результата два крайних справа нуля заменяются на «двойки», остается один ноль. Общее количество «двоек»: $14 + 2 = 16$.
- 5) Прибавление значения 3^{38} не изменит количества «двоек» в троичном числе: слева от имеющихся цифр появятся еще $38 - 18 = 20$ «нулей» и одна «единица» – на 39-й справа позиции.

6) Итак, результат, записанный в троичной системе, содержит 39 цифр. Его состав: 16 «двоек», 2 «единицы» (их позиции: 39-я и 10-я справа) и 21 «нуль» ($39-16-2=21$).

Ответ: 16.

13. Значение арифметического выражения: $9^8 + 3^5 - 9$ записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

Решение (1 способ):

Приведем все слагаемые к виду 3^N и расставим в порядке убывания степеней:

$$9^8 + 3^5 - 9 = 3^{16} + 3^5 - 3^2$$

Первое слагаемое, 3^{16} , дает в троичной записи одну единицу – она нас не интересует, а пара $3^5 - 3^2$ дает $5 - 2 = 3$ двойки

Ответ: 3.

Решение (2 способ):

Задача может быть решена с помощью программы на Python, где есть встроенная поддержка длинных чисел:

```
x = 9**8 + 3**5 - 9
x3 = ""
while x:
    x3 = str(x%3) + x3
    x //= 3
print ('Ответ:', x3.count('2'))
```

Вариант без использования символьных строк:

```
x = 9**8 + 3**5 - 9
count2 = 0
while x:
    if x % 3 == 2:
        count2 += 1
    x //= 3
print ('Ответ:', count2).
```

Ответ: 3.

Решение (3-й способ, задача может быть решена с помощью электронной таблицы):

1) *Замечание.* Электронные таблицы имеют ограничения при работе с длинными целыми числами. Например, Excel при вводе больших чисел заменяет все цифры после 15-го разряда на нули. Это легко проверить, введя в ячейку число с более чем 15-ю разрядами.

2) Обычно электронные таблицы при этом переходят к экспоненциальному (научному) формату. Если число больше, чем 10^{15} , то оно хранится как вещественное число (неточно). Это ограничивает использование электронных таблиц. В этой задаче заданное число меньше, чем 10^{15} , поэтому использовать электронные таблицы можно.

3) Введем число, заданное арифметическим выражением, в ячейку электронной таблицы:

A1 fx =9^8+3^5-9			
	A	B	C
1	43046955		
2			

4) Выполним алгоритм перевода числа в троичную систему: найдем в B1 остаток от деления числа на 3, а в A2 – частное:

D15 fx		
	A	B
1	=9^8+3^5-9	=ОСТАТ(A1;3)
2	=ЧАСТНОЕ(A1;3)	

5) Скопируем формулы из A2 и B1 вниз до того момента, когда частное станет равно 0 (это означает окончание процесса перевода):

14	27	0
15	9	0
16	3	0
17	1	1
18	0	0
19		

6) подсчитаем в столбце B число остатков, равных 2:

B19		fx =СЧЁТЕСЛИ(B1:B18;2)	
	A	B	C
16	3	0	
17	1	1	
18	0	0	
19		3	

Ответ: 3.

14. Сколько значащих нулей в двоичной записи числа $4^{512} + 8^{512} - 2^{128} - 250$?

Решение (1-й способ):

1) *Общая идея:* количество значащих нулей равно количеству всех знаков в двоичной записи числа (его длине!) минус количество единиц.

2) Приведем все числа к степеням двойки, учитывая, что $250 = 256 - 4 - 2 = 2^8 - 2^2 - 2^1$:

$$4^{512} + 8^{512} - 2^{128} - 250 = (2^2)^{512} + (2^3)^{512} - 2^{128} - 2^8 + 2^2 + 2^1 =$$

$$= 2^{1536} + 2^{1024} - 2^{128} - 2^8 + 2^2 + 2^1.$$

3) Старшая степень двойки $- 2^{1536}$, двоичная запись этого числа представляет собой единицу и 1536 нулей, то есть состоит из 1537 знаков; таким образом, остается найти количество единиц.

4) Вспомним, что число $2^N - 2^K$ при $K < N$ записывается как $N - K$ единиц и K нулей.

5) Для того чтобы использовать это свойство, нам нужно представить заданное выражение в виде пар вида $2^N - 2^K$, причем в этой цепочке степени двойки нужно выстроить по убыванию. В нашем случае в выражении:

$$2^{1536} + 2^{1024} - 2^{128} - 2^8 + 2^2 + 2^1$$

стоит два знака «минус» подряд, это не позволяет сразу использовать формулу.

6) Используем теперь равенство, так что $- 2^{128} = - 2^{129} + 2^{128}$, получаем $2^{1536} + 2^{1024} - 2^{129} + 2^{128} - 2^8 + 2^2 + 2^1$.

7) Здесь две пары $2^N - 2^K$, а остальные слагаемые дают по одной единице, поэтому общее число единиц равно $1 + (1024 - 129) + (128 - 8) + 1 + 1 = 1018$.

8) Таким образом, количество значащих нулей равно $1537 - 1018 = 519$.

Ответ: 519.

Решение (2-й способ, с помощью программа на Python):

Если доступна среда программирования на Python, можно написать программу, которая использует встроенную арифметику длинных чисел:

```
x = 4**512 + 8**512 - 2**128 - 250
print (bin(x)[2:].count('0'))
```

Ответ: 519.

15. Сколько единиц в двоичной записи числа $4^{2015} + 8^{405} - 2^{150} - 122$?

Решение:

1) Приведем все числа к степеням двойки, учитывая, что $122 = 128 - 4 - 2 = 2^7 - 2^2 - 2^1$:

$$4^{2015} + 8^{405} - 2^{150} - 122 = (2^2)^{2015} + (2^3)^{405} - 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1 = \\ = 2^{4030} + 2^{1215} - 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1.$$

2) Вспомним, число $2^N - 2^K$ при $K < N$ записывается как $N - K$ единиц и K нулей.

3) Для того чтобы использовать это свойство, нам нужно представить заданное выражение в виде пар вида $2^N - 2^K$, причем в этой цепочке степени двойки нужно выстроить по убыванию. В нашем случае в выражении

$$2^{4030} + 2^{1215} - 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1$$

стоит два знака «минус» подряд, это не позволяет сразу использовать формулу.

4) Используем теперь равенство, так что $-2^{150} = -2^{151} + 2^{150}$; получаем $2^{4030} + 2^{1215} - 2^{151} + 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1$.

5) Здесь две пары $2^N - 2^K$, а остальные слагаемые дают по одной единице.

6) Общее число единиц равно $1 + (1215 - 151) + (150 - 7) + 1 + 1 = 1210$.

Ответ: 1210.

16. Сколько единиц в двоичной записи числа $4^{2014} + 2^{2015} - 8$?

Решение:

1) Приведем все числа к степеням двойки:

$$4^{2014} + 2^{2015} - 8 = (2^2)^{2014} + 2^{2015} - 2^3 = 2^{4028} + 2^{2015} - 2^3.$$

2) Вспомним, что число $2^N - 1$ в двоичной системе записывается как N единиц, а число $2^N - 2^K$ при $K < N$ записывается как $N - K$ единиц и K нулей.

3) Согласно п. 2, число $2^{2015} - 2^3$ запишется как 2012 единиц и 3 нуля.

4) Прибавление 2^{4028} даст еще одну единицу, всего получается $2012 + 1 = 2013$ единиц.

Ответ: 2013.

Решение (2 способ с помощью программа на Python):

Программа использует встроенную «длинную арифметику» Python:

```
x = bin(4**2014 + 2**2015 - 8)
print(x.count('1'))
```

Ответ: 2013.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько единиц содержится в двоичной записи значения выражения:

$$4^{2013} + 2^{2012} - 17?$$

Ответ: 2012.

2. Значение арифметического выражения: $16^8 + 4^6 - 16$ записали в системе счисления с основанием 4. Сколько цифр «3» содержится в этой записи?

Ответ: 4.

3. Значение арифметического выражения: $9^{65} + 3^{195} - 9$ – записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

Ответ: 128.

4. Значение арифметического выражения

$$4 \cdot 125^{32} - 3 \cdot 25^{25} + 4 \cdot 5^{13} - 14$$

записали в системе счисления с основанием 5.

Сколько цифр 4 содержится в этой записи?

Ответ: 56.

5. Значение арифметического выражения

$$5 \cdot 216^9 - 36^{10} + 4 \cdot 6^{11} - 8$$

записали в системе счисления с основанием 6. Сколько цифр 5 содержится в этой записи?

Ответ: 16.

Литература

1. Банк заданий ЕГЭ. – URL: <http://www.fipi.ru>.
2. Голубев О.Б., Морозова И.В. Анализ выполнения заданий в содержательных разделах ЕГЭ по информатике и ИКТ // Вестник Вологодского государственного университета. Серия: Гуманитарные, общественные, педагогические науки. – 2016. – № 3. – С. 73–76.
3. Зорина Е.М., Зорин М.В. ЕГЭ – 2020. Информатика: сборник заданий: 350 заданий с ответами. – М.: Эксмо, 2019.
4. Крылов С.С., Чуркина Т.Е. ЕГЭ. Информатика и ИКТ – 2022: типовые экзаменационные варианты: 10 вариантов. – М.: Национальное образование, 2021.
5. Лещинер В.Р. ЕГЭ 2022. Информатика. 16 вариантов. – М.: Экзамен, 2021.
6. Поляков К.Ю., Еремин Е.А. Как нам реорганизовать ЕГЭ по информатике? // Информатика в школе. – 2019. – № 3. – С. 2–7.
7. Поляков К.Ю. Подготовка к ЕГЭ по информатике. – URL: <http://kpolyakov.spb.ru/school/ege.htm>.
8. Решу ЕГЭ. – URL: <https://inf-ege.sdangia.ru>
9. Самылкина Н.Н., Синицкая И.В., Соболева В.В. ЕГЭ – 2020. Информатика: тематические тренировочные задания. – М.: Эксмо, 2019. – 176 с.
10. Ушаков Д.М. ЕГЭ – 2022. Информатика. 20 тренировочных вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ. – М.: АСТ, 2021.

Учебное издание

Серия «На пути к эффективной школе»

**РАБОТА НАД ЗАДАЧАМИ ПО ТЕМЕ
«ИНФОРМАЦИЯ, ИНФОРМАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ»
ПРИ ПОДГОТОВКЕ ОБУЧАЮЩИХСЯ К ГИА
ПО ИНФОРМАТИКЕ**

Учебное пособие

*для подготовки к итоговой государственной аттестации
выпускников основной и старшей школы*

Составители:

**Ганичева Елена Михайловна,
Голубев Олег Борисович**

Подписано в печать 03.12.2021. Формат 60×84/16.
Печать офсетная. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 4,0. Тираж 500 экз. Заказ 1789

Вологодский институт развития образования
160011, г. Вологда, ул. Козленская, 57
E-mail: izdat@viro.edu.ru